

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

[1,5] (a) Determine para que valores de k o sistema homogéneo $AX = 0$ é possível determinado.

[2,0] (b) Verifique que, para $k = 2$ a inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

[2,0] (c) Considerando $k = 3$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, atendendo a que para $k = 3$, $|A| = 8$, determine usando a regra de Cramer a solução do sistema $AX = B$.

Mude de Folha

2. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0))$ e $\mathcal{B}_2 = ((1, 2), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela matriz

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

[1,0] (a) Determine a imagem do vector $(3, 2, 1)$ pela aplicação linear f .

[1,0] (b) Justifique sem efectuar cálculos que f não é injectiva.

[1,0] (c) Determine, justificando, a $\dim \text{Im } f$ e indique se f é sobrejectiva.

[2,0] (d) Utilizando matrizes de mudança de base determine $C = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, b.c.\mathbb{R}^2)$.

Mude de Folha

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

[1,5] (a) Determine os valores próprios da matriz A e as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,0] (b) Justifique que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ são vectores próprios da matriz A e indique a que valor próprio está, cada um deles, associado.

[1,5] (c) Determine uma base do subespaço próprio associado ao valor próprio -2 .

[1,5] (d) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Mude de Folha

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A + A^\top = 3I_n.$$

- [1,0] (a) Mostre que a matriz A não é hemi-simétrica e que a matriz $A + A^\top$ é invertível.
- [1,5] (b) Prove que 3 é valor próprio de A se, e só se, A não é invertível. Conclua que quando 3 é valor próprio de A também 0 é valor próprio de A .
- [1,5] (c) Justifique que, se X é vector próprio de A associado ao valor próprio 3 então X é vector próprio de $A^\top$ associado ao valor próprio 0.

Fim

1. (a) O sistema $AX = 0$ é possível e determinado se, e só se, $\det A \neq 0$. Vejamos quando é que $\det A \neq 0$. Temos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow[l_3 - l_1]{l_2 - l_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & k-1 & 2 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = (k-1)(k+1).$$

Então $\det A = 0$ se, e só se $(k-1)(k+1) = 0$, ou seja, se, e só se $k = 1$ ou $k = -1$.

Assim, o sistema é possível e determinado para $k \neq 1$ e $k \neq -1$.

Alternativamente poderíamos ter visto para que valores de k a matriz A tem característica igual a 3.

(b) Para $k = 2$ temos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Tomemos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Para verificar que esta matriz é a inversa da matriz A basta ver que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = I_3.$$

Ora, de facto, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1.1 + 1(-\frac{1}{3}) + (-1)(-\frac{1}{3}) & 1.(-1) + 1.1 + (-1).0 & 1.1 + 1(-\frac{2}{3}) + (-1)(\frac{1}{3}) \\ 1.1 + 2(-\frac{1}{3}) + 1(-\frac{1}{3}) & 1.(-1) + 2.1 + 1.0 & 1.1 + 2(-\frac{2}{3}) + 1.(\frac{1}{3}) \\ 1.1 + 1(-\frac{1}{3}) + 2(-\frac{1}{3}) & 1.(-1) + 1.1 + 2.0 & 1.1 + 1(-\frac{2}{3}) + 2(\frac{1}{3}) \end{bmatrix} = I_3.$$

Logo $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de A .

- (c) Dado que $\det A = 8 \neq 0$, a matriz simples A do sistema $AX = B$ é invertível. Assim sendo podemos aplicar a regra de Cramer para resolver o sistema. Sabemos que a solução $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ do sistema é dada por

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = 1, \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = -\frac{1}{2}.$$

Usando a Regra de Sarrus para calcular cada um dos determinantes de ordem três vem:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{2}.$$

2. (a) Começemos por calcular as coordenadas do vector $(3, 2, 1)$ na base $\mathcal{B}_1$.

$$\text{Ora } (3, 2, 1) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(1, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \alpha + \beta + \gamma \\ 2 = \alpha + \beta \\ 1 = \beta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 1. \end{cases}$$

Temos $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Podemos então afirmar que a sequência das coordenadas de $f(3, 2, 1)$ na base $\mathcal{B}_2$ é $(3, 0)$.

Donde $f(3, 2, 1) = 3(1, 2) + 0(0, 1) = (3, 6)$.

(b) O Teorema da Dimensão diz que, neste caso,

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Nuc} f + \dim \text{Im} f \quad \text{ou seja} \quad 3 = \dim \text{Nuc} f + \dim \text{Im} f.$$

Ora, para que a aplicação fosse injectiva teríamos de ter $\dim \text{Nuc} f = 0$. Tal nunca pode acontecer uma vez que $\text{Im} f$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ e, portanto, a sua dimensão é no máximo 2 e, por isso, $\dim \text{Nuc} f \geq 1$. Logo f não é injectiva.

(c) Sabemos que $\dim \text{Im} f = r(A)$. Ora dado que a matriz A está em forma de escada e tem 2 linhas não nulas, temos que $r(A) = 2$. Como $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \dim \text{Im} f$ podemos concluir que f é sobrejectiva.

(d) Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{B}_1 & \searrow A & \mathcal{B}_2 & \xrightarrow{Q} & \text{b.c.}_{\mathbb{R}^2} \\ & & & \nearrow C & \end{array},$$

que representa a composição de aplicações $f = \text{id}_{\mathbb{R}^2} \circ f$. Esta igualdade, em termos matriciais e considerando as bases indicadas no diagrama, corresponde à igualdade

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \text{bc}_{\mathbb{R}^2}) = \mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_2, \text{bc}_{\mathbb{R}^2}) \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2),$$

ou seja,

$$C = QA$$

Calculemos a matriz $Q = \mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_2, \text{bc}_{\mathbb{R}^2})$.

Temos

$$\text{id}_{\mathbb{R}^2}(1, 2) = (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1)$$

$$\text{id}_{\mathbb{R}^2}(0, 1) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1).$$

Desta forma obtemos $Q = \mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_2, \text{bc}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, e assim vem

$$C = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \text{bc}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Os valores próprios da matriz A são os zeros da equação característica $|A - \lambda I_3| = 0$.

Temos

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I_3) = 0 &\Leftrightarrow (4 - \lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 8 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (4 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 - 16] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (4 - \lambda)((2 - \lambda) - 4)((2 - \lambda) + 4) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (4 - \lambda)(-\lambda - 2)(6 - \lambda) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -(\lambda - 4)(\lambda + 2)(\lambda - 6) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = 4 \vee \lambda = 6.
 \end{aligned}$$

Dado que neste caso todos os valores próprios são raízes simples do polinómio característico $|A - \lambda I_3|$, podemos concluir que todos eles têm multiplicidade algébrica igual a 1.

- (b) Para que X seja um vector próprio de A teremos de ter $X \neq 0$ e $AX = \lambda X$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Nesse caso diz-se que X é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ . Ora temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Concluimos assim que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 6, e

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 4.

- (c) Para calcularmos M_{-2} , o subespaço próprio associado ao valor próprio -2 , teremos de resolver o sistema $(A + 2I_3)X = 0$. Os vectores de M_{-2} são as soluções do referido sistema.

Para resolver o sistema levemos a matriz simples $A + 2I_3$ à sua forma de escada reduzida. Através de transformações elementares nas linhas de $A + 2I_3$ obtemos

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} &\xrightarrow{l_2 - 2l_1} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}l_2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - 6l_2} \\
 &\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 + l_2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}l_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{f.e.r.})
 \end{aligned}$$

Assim temos equivalentemente

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y \\ z = 0 \end{cases}$$

Podemos então afirmar que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in M_{-2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}.$$

Então, pelo que foi visto atrás, a sequência $\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é geradora de M_{-2} . Como é uma sequência formada apenas por um vector, que é não nulo, é também uma sequência linearmente independente. Logo constitui uma base do subespaço M_{-2} .

(d) Dado que

$$(X_1, X_2, X_3) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right),$$

é uma sequência de vectores próprios de A associados a valores próprios dois a dois distintos, é, por isso, linearmente independente. Por outro lado, como são 3 vectores do espaço $\mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ que tem dimensão 3, são uma base desse espaço. Esta sequência é portanto uma base de $\mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ constituída por vectores próprios. Concluimos então que A é diagonalizável.

A matriz que permite diagonalizar a matriz A e obter a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é a matriz $P \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ cujas colunas correspondem aos vectores próprios associados aos valores próprios 6, -2 e 4, respectivamente.

Assim, a matriz P tal que $P^{-1}AP = D$ é

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Se A fosse hemi-simétrica teríamos $A = -A^\top$, ou seja $A + A^\top = 0_{n \times n}$. Mas por hipótese temos $A + A^\top = 3I_n \neq 0_{n \times n}$. Donde A não é hemi-simétrica. Por outro lado temos $|A + A^\top| = |3I_n| = 3^n \neq 0$ e, portanto, $A + A^\top$ é invertível.

(b) Dado que $A = -A^\top + 3I_n$ vem

$$\begin{aligned} 3 \text{ é valor próprio de } A &\Leftrightarrow |A - 3I_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow |-A^\top + 3I_n - 3I_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow |-A^\top| = 0 \Leftrightarrow |A^\top| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \\ &\Leftrightarrow A \text{ não é invertível} \end{aligned}$$

Por outro lado se A não é invertível, então $|A| = 0 = |A - 0I_n|$, ou seja, 0 é valor próprio de A .

- (c) Suponhamos que X é vector próprio de A associado ao valor próprio 3. Então $X \neq 0$ e $AX = 3X$, ou seja, $AX - 3X = 0$. Pondo a matriz coluna X em evidência vem $(A - 3I_n)X = 0$. Dado que, por hipótese, temos $A - 3I_n = -A^\top$ resulta que $-A^\top X = 0$ e, consequentemente, $A^\top X = 0$. Logo, como $X \neq 0$, X é vector próprio de $A^\top$ associado ao valor próprio zero.