# Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Primeiro Teste – 17 de Novembro de 2010

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

[4,5] **1.** A linha 4 de uma matriz $A$ de elementos reais é $(2,3,5,3,1)$ e a coluna 3 é $(5,2,3,5)$.

(a) Indique, justificando, o número de linhas e o número de colunas da matriz $A$.

(b) Sabendo que a coluna 3 de uma matriz $B$ de elementos reais com 8 colunas é $(3,2,1,0,0)$, justifique que é possível efectuar $AB$, indique o número de linhas e o número de colunas da matriz produto e os elementos $(AB)_{43}$ e $((AB)^\top)_{34}$.

(c) Seja $(1,2,1,0)$ a terceira coluna de uma matriz $C$ de elementos reais com cinco colunas.

i. Indique, justificando se é possível efectuar o produto $AC$.

ii. Justifique que é possível efectuar $3A+2C$ e indique a terceira coluna desta matriz.

(d) A diagonal de uma matriz quadrada de elementos reais $F$ é $(0,0,0,0)$ a primeira linha é $(0,1,4,-3)$ e a terceira coluna $(4,2,0,5)$. Sabendo que $F$ é uma matriz hemi-simétrica, indique, justificando, os valores de $F_{32}$, $F_{41}$ e de $F_{34}$.

Mude de Folha

[4,5] **2.** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e o seguinte produto de matrizes:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

(a) Sem efectuar o produto de matrizes, determine, justificando, a matriz $B$. Justifique que $A$ e $B$ são equivalentes por linhas.

(b) Indique, justificando, a característica da matriz $A$. Conclua se a matriz $A$ é ou não invertível.

(c) Indique a forma de escada reduzida de $A$ e indique $A^{-1}$ como produto de matrizes elementares.

(d) Dê exemplo de uma matriz $C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, equivalente por linhas a $A$ e a $B$, com $C \neq A$ e $C \neq B$. Justifique.

Mude de Folha

[4,5] **3.** Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha - 2 & 2 \\ 1 & \alpha - 1 & 2 - \alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

Considere, ainda, o sistema de três equações lineares nas incógnitas $x, y$ e $z$ sobre $\mathbb{R}$, $AX = C$.

(a) Indique as equações que formam o sistema $AX = C$.

(b) Justifique que os sistemas $AX = C$ e $BX = C$ são equivalentes.

(c) Indique, justificando, para que valores de $\alpha$ e $\beta$ o sistema $AX = C$ tem uma única solução.

(d) Verifique, utilizando matrizes, que a sequência $(2, 2, -1)$ é, para $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, a única solução do sistema $AX = C$.

Mude de Folha

[3,5] **4. A.** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$

(a) Determine, apresentando todos os cálculos efectuados, $A(3|3)$, $A(4|1)$, $\widehat{A}_{33}$ e $\widehat{A}_{41}$.

(b) Indique o determinante de $A$ e determine, justificando, para que valores de $\alpha$ a matriz $A$ é invertível.

(c) Para $\alpha = 2$, $\det(A) = 6$. Indique o valor do determinante de uma matriz $B$ se:

i. $B$ se obteve de $A$ multiplicando a primeira linha de $A$ por 2.

ii. $B$ se obteve de $A$ trocando a segunda linha de $A$ com a primeira.

[3,0] **B.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que:

(a) A matriz $A + A^\top$ é simétrica e a matriz $A - A^\top$ é hemi-simétrica.

(b) Se $n$ é ímpar e $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz hemi-simétrica então $\det C = 0$.

(c) Justifique que para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com $n$ ímpar, a matriz $A - A^\top$ não é invertível.

Fim

**Álgebra Linear e Geometria Analítica C**

Primeiro Teste – 17 de Novembro de 2010

Departamento de Matemática

Uma resolução com notas explicativas

---

**1.** (a) A matriz $A$ tem 4 linhas (número de elementos da coluna 3 de $A$) e 5 colunas (número de elementos da linha 4 de $A$). Assim, podemos afirmar que $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$.

(b) A matriz $B$ tem 5 linhas e, é-nos dito que, tem 8 colunas, logo $B \in \mathcal{M}_{5\times 8}(\mathbb{R})$. Uma vez que, o número de colunas da matriz $A$ é igual ao número de linhas da matriz $B$ ($A$ é $4\times 5$ e $B$ é $5\times 8$) pode efectuar-se a multiplicação $AB$, onde $AB \in \mathcal{M}_{4\times 8}(\mathbb{R})$. O elemento $(AB)_{43}$ é calculado utilizando a linha 4 da matriz $A$ e a coluna 3 da matriz $B$, que são dadas. Assim

$$(AB)_{43} = 2\times 3 + 3\times 2 + 5\times 1 + 3\times 0 + 1\times 0 = 6+6+5+0+0 = 17.$$

Uma vez que $((AB)^\top)_{34} = (AB)_{43}$ temos que $((AB)^\top)_{34} = 17$.

(c) i. Como $C$ tem 4 linhas (número de elementos da coluna 3 de $C$) e cinco colunas, o número de colunas de $A$ é diferente do número de linhas de $C$, ( $5 \neq 4$). Este facto não nos permite calcular o produto $AC$.

ii. Dado que $A, C \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$ podemos afirmar que também que $3A, 2C \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$. Uma vez que $3A$ e $2C$ têm o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas podemos efectuar a adição destas matrizes. Por outro lado, sabemos que o elemento $ij$ de $3A + 2C$ é dado por

$$(3A+2C)_{ij} = (3A)_{ij} + (2C)_{ij} = 3A_{ij} + 2C_{ij}.$$

Deste modo a coluna 3 de $3A + 2C$ é dada por

$$\left((3A+2C)_{13}, (3A+2C)_{23}, (3A+2C)_{33}, (3A+2C)_{43}\right),$$

onde

$$\begin{aligned}
(3A+2C)_{13} &= 3\times 5 + 2\times 1 = 17\\
(3A+2C)_{23} &= 3\times 2 + 2\times 2 = 10\\
(3A+2C)_{33} &= 3\times 3 + 2\times 1 = 11\\
(3A+2C)_{43} &= 3\times 5 + 2\times 0 = 15
\end{aligned}$$

Assim a coluna 3 da matriz $3A + 2C$ é $(17, 10, 11, 15)$.

(d) Como $F$ é uma matriz hemi-simétrica, sabemos que

$$F_{ij} = -F_{ji} \quad i, j \in \{1,2,3,4\}.$$

Utilizando a expressão anterior temos $F_{32} = -F_{23} = -2$, $F_{41} = -F_{14} = 3$ e $F_{34} = -F_{43} = -5$.

**2.** (a) A matriz $B$ resulta de multiplicar à esquerda a matriz $A$ por duas matrizes elementares. Sejam $E_1$ e $E_2$ essas matrizes, por esta ordem. A multiplicação de $A$ por essas duas matrizes corresponde a efectuar em $A$ a transformação nas linhas que permite obter $E_2$ a partir da matriz identidade, ou seja $l_3 - 2l_1$, seguida da transformação que permite obter $E_1$ a partir da matriz identidade, ou seja $l_3 + l_2$. Assim temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = B.$$

As matrizes $A$ e $B$ são equivalentes por linhas porque $B$ resulta de $A$ por transformações nas linhas.

(b) Dado que $B$ é uma forma de escada de $A$ e o número de linhas não nulas de $B$ é 3 concluímos que a característica de $A$ é 3. Como $A$ é uma matriz quadrada e a sua característica é igual à sua ordem ou, equivalentemente, ao seu número de linhas, concluímos que $A$ é invertível.

(c) Como pela alínea b) a matriz $A$ é invertível, a sua forma de escada reduzida é a matriz identidade. Determinemos a forma de escada reduzida de $A$ a partir da sua forma de escada obtida em a) de modo a que possamos saber a expressão de $A^{-1}$ como produto de matrizes elementares.

Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 - l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, como

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) A = I_3,$$

concluimos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) A matriz $I_3$ é uma matriz equivalente por linhas a $A$ e $B$ dado que é a forma de escada reduzida de ambas. Alternativamente, qualquer matriz, distinta de $A$ e de $B$ e obtida através das matrizes $A$ ou $B$ por transformações elementares nas suas linhas, seria uma solução possível.

**3.** (a) Temos

$$AX = C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha - 2 & 2 \\ 1 & \alpha - 1 & 2 - \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y \\ 2x + (\alpha - 2)y + 2z \\ x + (\alpha - 1)y + (2 - \alpha)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

O sistema $AX = C$ é dado pela equações:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + (\alpha - 2)y + 2z = 0 \\ x + (\alpha - 1)y + (2 - \alpha)z = \beta. \end{cases}$$

(b) Para provar que os sistemas $AX = C$ e $BX = C$ são equivalentes bastará provar que as matrizes ampliadas $[A|C]$ e $[B|C]$ são equivalentes por linhas.

Temos

$$[A|C] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha - 2 & 2 & 0 \\ 1 & \alpha - 1 & 2 - \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 - 2l_1 \\ l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 - \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \beta \end{array}\right] = [B|C],$$

portanto, as matrizes $[A|C]$ e $[B|C]$ são equivalentes por linhas, o que nos permite concluir que os sistemas $AX = C$ e $BX = C$ são sistemas equivalentes.

(c) O sistema $AX = C$ será possível e determinado se, e só se, a característica de $A$ for igual ao seu número de colunas, ou seja se, e só se, $r(A) = 3$. Pelo que fizemos anteriormente temos uma forma de escada da matriz $A$ que é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Ora esta matriz tem 3 linhas não nulas se, e só se, $\alpha \neq 0$. Donde $AX = C$ tem uma única solução se, e só se, $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

(d) Para $\alpha = 1$, pela alínea c) sabemos que o sistema referido tem uma única solução. Assim bastará provar que o terno $(2, 2, -1)$ é solução. Uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = C,$$

concluímos que $(2, 2, -1)$ é solução, para $\alpha = 1$, do sistema $AX = C$.

**4.** **A.** (a) Relembremos que $A(i|j)$ é a matriz que se obtém de $A$ suprimindo a linha $i$ e a coluna $j$ enquanto que $\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det A(i|j)$. Assim temos

$$A(3|3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad A(4|1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A}_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{bmatrix} = \alpha(\alpha - 1),$$

tendo em conta que é um determinante de uma matriz triangular superior, e

$$\widehat{A}_{41} = (-1)^{4+1}\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\alpha(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -\alpha(-1)(-3) = -3\alpha,$$

aplicando o teorema de Laplace na 1ª coluna da matriz de ordem 3.

(b) Dado que a matriz $A$ é triangular superior o seu determinante é dado pelo produto dos elementos da sua diagonal principal. Assim temos

$$\det A = 3\alpha(\alpha - 1).$$

Ora

$$\det A = 3\alpha(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \vee \alpha = 0.$$

Dado que uma matriz é invertível se, e só se, o seu determinante é não nulo, sabemos que a matriz é invertível quando $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$.

(c) i. Dado que $B$ se obtém de $A$ multiplicando por 2 uma linha de $A$ (transformação do tipo II) temos $\det B = 2\det A = 12$.

ii. Como, neste caso, $B$ se obtém de $A$ trocando duas linhas de $A$ (transformação do tipo I) temos $\det B = -\det A = -6$.

**B.** (a) Sabemos que uma matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é simétrica se $M^\top = M$. Assim, temos

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$$

donde podemos concluir que $A + A^T$ é simétrica.
Por outro lado, uma matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é hemi-simétrica se $M^\top = -M$. Como,

$$(A - A^T)^T = (A + (-A^T))^T = A^T + (-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T),$$

concluimos que $A - A^T$ é hemi-simétrica.

(b) Como $C$ é hemi-simétrica, sabemos que $C = -C^\top$. Por outro lado, para qualquer matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, temos

- $\det(C) = \det\left(C^\top\right)$
- $\det(\alpha C) = (\alpha)^n \det(C)$.

Como $C = -C^\top$ e $\det(C) = \det\left(C^\top\right)$ podemos afirmar que

$$\det(C) = \det\left(C^\top\right) = \det(-C). \tag{1}$$

Atendendo a que $\det(-C) = \det((-1)C) = (-1)^n \det(C)$ e que $n$ é ímpar, temos

$$\det(-C) = -\det(C) \tag{2}$$

De (1) e (2) concluimos que $\det(C) = -\det(C)$, logo $2\det(C) = 0$ e, portanto, $\det(C) = 0$.

(c) Pela alínea a) sabemos que a matriz $A - A^T$ é hemi-simétrica. Como, pela alínea b), toda a matriz hemi-simétrica com ordem ímpar tem determinante nulo, concluímos que $\det(A - A^\top) = 0$. Uma vez que uma matriz com determinante nulo não é invertível, então $A - A^\top$ não é invertível.