FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Segundo Teste – 14 de Janeiro de 2011

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

1. Considere os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = -2a\} \qquad \text{e} \qquad H = \langle (2,1,2),(1,0,0),(-1,1,2) \rangle.$$

[2,0] (a) Determine, justificando, uma base de G e uma base de H indicando as respectivas dimensões.

[2,0] (b) Obtenha um conjunto de geradores para o subespaço $G+H$ e indique a sua dimensão.

[1,5] (c) Justifique que $((-1,1,2))$ é uma base de $G \cap H$.

Mude de Folha

2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que

$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \qquad f(a,b,c) = (a+b, 2b-a).$$

[2,5] (a) Determine uma base do núcleo de f e a dimensão do subespaço Im f. Indique, justificando, se f é injectiva ou se é sobrejectiva.

[2,5] (b) Considere as bases

$$\mathcal{B} = ((1,0,1),(1,1,1),(0,0,1)) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}' = ((1,1),(1,0))$$

de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determine, indicando todos os cálculos efectuados,

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}').$$

Mude de Folha

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

[2,0] (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,5] (b) Determine uma base do subespaço próprio associado ao valor próprio 2 e indique a multiplicidade geométrica deste valor próprio.

[2,0] (c) Sabendo que -1 é valor próprio de A e que $\text{mg}(-1) = 1$ conclua, justificando, que A é diagonalizável e indique uma matriz diagonal semelhante a A.

Mude de Folha

4. Seja $\mathcal{C} = \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \text{existe k} \in \mathbb{R} \text{ tal que } A + A^\top = kI_n\right\}$.

[1,5] (a) Mostre que $\mathcal{C}$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

[2,5] (b) Seja $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a aplicação linear tal que

$$\forall_{A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})} \quad f(A) = A + A^\top.$$

Mostre que

$$\text{Nuc}\, f = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é hemi-simétrica}\} \subseteq \mathcal{C}.$$

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Segundo Teste – 14 de Janeiro de 2011

Uma resolução com notas explicativas

---

1. (a) Comecemos por determinar uma sequência geradora do subespaço G. Temos

$(a,b,c) \in G \Leftrightarrow (a,b,c) = (a,b,-2a) = (a,0,-2a) + (0,b,0) = a(1,0,-2) + b(0,1,0), a,b \in \mathbb{R}$.

Assim vem $G = \langle (1,0,-2),(0,1,0) \rangle$ e $S = ((1,0,-2),(0,1,0))$ é uma sequência geradora de G.

Dado que

$$(1,0,-2) \neq \alpha(0,1,0), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

concluímos que S uma sequência linearmente independente. Donde S é uma base de G e dim G=2.

De acordo com a definição de H, temos que a sequência $S' = ((2,1,2),(1,0,0),(-1,1,2))$ é uma sequência geradora de H. Usemos matrizes para determinar uma base de H a partir da sequência S'. Consideremos a matriz A cujas linhas são os vectores da sequência S'. Fazendo transformações nas linhas de A obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+l_1]{l_2-2l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos então que $((1,0,0),(0,1,2))$ é uma base de H e dim$H$=2.

(b) Dado que $G = \langle (1,0,-2),(0,1,0) \rangle$ e $H = \langle (1,0,0),(0,1,2) \rangle$, $G+H$ é gerado pela união das sequências geradoras que definem os subespaços G e H, isto é,

$$G + H = \langle (1,0,-2),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,2) \rangle.$$

Usemos matrizes para calcular uma base de $G+H$, a partir desta sequência geradora. Temos então

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4-l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4-l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim $((1,0,-2),(0,1,0),(0,0,2))$ é uma base de $G+H$ e $\dim(G+H) = 3$. Dado que $G+H$ é um subespaço de dimensão 3 de $\mathbb{R}^3$, concluímos que $G+H = \mathbb{R}^3$.

(c) Pelo teorema das dimensões temos:

$$\dim(G+H) = \dim G + \dim H - \dim G \cap H,$$

donde tendo em conta a alínea b) vem $3 = 2 + 2 - \dim G \cap H$, ou seja $\dim G \cap H = 1$.

Ora num espaço vectorial de dimensão 1, qualquer sequência desse espaço com um vector não nulo constitui uma base. Dado que $(-1,1,2) \in G$, pois satisfaz a condição $c = -2a$, e $(-1,1,2) \in H$ pois é um dos geradores na definição de H, temos que $(-1,1,2) \in G \cap H$. Assim $((-1,1,2))$ é uma base de $G \cap H$.

2. (a) Determinemos uma sequência geradora de Nuc$f$. Temos

$$\begin{array}{rlllll} (a,b,c)\in \mathrm{Nuc}f & \Leftrightarrow & f(a,b,c)=(0,0) & \Leftrightarrow & (a+b,2b-a)=(0,0) & \Leftrightarrow \\ a+b=0\ \wedge\ 2b-a=0 & \Leftrightarrow & a=-b\ \wedge\ 3b=0 & \Leftrightarrow & a=0\ \wedge\ b=0\ \wedge\ c\in\mathbb{R} & \Leftrightarrow \\ (a,b,c)=(0,0,c)=c(0,0,1),\ c\in\mathbb{R}. & & & & & \end{array}$$

Logo Nuc$f=\langle(0,0,1)\rangle$ e, portanto, $((0,0,1))$ é uma sequência geradora de Nuc$f$. Então como a referida sequência tem apenas um vector não nulo, concluímos que é linearmente independente e portanto é uma base de Nuc$f$. Assim temos dim Nuc$f=1$.

Aplicando o Teorema da Dimensão, obtemos dim $\mathbb{R}^3=\dim \mathrm{Nuc}f+\dim \mathrm{Im}f$ ou seja $3=1+\dim \mathrm{Im}f$. Portanto $\dim \mathrm{Im}f=2$.

Dado que Nuc $f=\langle(0,0,1)\rangle\neq\{(0,0,0)\}$ concluímos que f não é injectiva. Como dim Im$f=2=\dim\mathbb{R}^2$ vem que Im $f=\mathbb{R}^2$, e podemos assim concluir que f é sobrejectiva.

(b) Calculemos as imagens dos vectores da base $\mathcal{B}$ e determinemos as coordenadas dessas imagens na base $\mathcal{B}'$. Temos

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,1)=(1,-1) & = & -1(1,1)+2(1,0) \\ f(1,1,1)=(2,1) & = & 1(1,1)+1(1,0) \\ f(0,0,1)=(0,0) & = & 0(1,1)+0(1,0). \end{array}$$

Donde $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. (a) Os valores próprios de A são as raízes do seu polinómio característico $|A-\lambda I_3|$.

Assim

$$\begin{array}{rcl} \det(A-\lambda I_3)=0 & \Leftrightarrow & \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow & (2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)=0 \\ & \Leftrightarrow & -(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0. \end{array}$$

Assim, o conjunto dos valores próprios de A é $\{-1,2\}$. Dado que 2 e -1 são, respectivamente, raízes dupla e simples do polinómio característico temos que a multiplicidade algébrica do valor próprio 2 é 2, ma$(2)=2$, e a multiplicidade algébrica do valor próprio -1 é 1, ma$(-1)=1$.

(b) Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 são dados pelas soluções não nulas do sistema $(A-2I_3)X=0$.

Assim temos

$$A-2I_3=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}l_1]{}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow[l_2+3l_1]{}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é então equivalente a

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vem então que

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : y = z \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ z \\ z \end{bmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dado que

$$\begin{bmatrix} x \\ z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ x, z \in \mathbb{R},$$

o subespaço próprio associado ao valor próprio 2 é $M_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Como

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

temos que é $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_2 e $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 2$.

(c) Dado que a multiplicidade algébrica (ma) de um valor próprio é sempre maior ou igual à sua multiplicidade geométrica (mg) e $\text{ma}(-1) = 1$, vem que $\text{mg}(-1) \leq 1$. Mas como a multiplicidade geométrica de qualquer valor próprio é sempre maior que zero, a multiplicidade geométrica do valor próprio -1 terá de ser 1, $\text{mg}(-1) = 1$.

Assim temos

$$\text{mg}(-1) + \text{mg}(2) = 1 + 2 = 3 = n = \text{ordem da matriz } A.$$

Logo A é diagonalizável. Uma matriz diagonal semelhante a A será uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são os valores próprios de A, ocorrendo cada um deles tantas vezes quanto a sua respectiva multiplicidade algébrica. Por exemplo a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

é uma matriz diagonal semelhante a A.

4. (a) Mostremos que $\mathcal{C}$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ utilizando o Critério de Subespaço Vectorial.

1) Por definição de $\mathcal{C}$ temos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

2) O vector nulo do espaço $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz nula de ordem n, que denotamos por $0_{n\times n}$.

Então $0_{n\times n} + (0_{n\times n})^T = 0_{n\times n} + 0_{n\times n} = 0_{n\times n} = 0I_n$. Donde $0_{n\times n} \in \mathcal{C}$ para $k = 0$.

3) Sejam $A, B \in \mathcal{C}$. Então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $A + A^T = k_1 I_n$ e $A + A^T = k_2 I_n$.

Assim vem

$$(A+B) + (A+B)^T = A + B + A^T + B^T = (A + A^T) + (B + B^T) = k_1 I_n + k_2 I_n = (k_1 + k_2) I_n,$$

com $k_1 + k_2 \in \mathbb{R}$. Logo $A + B \in \mathcal{C}$.

4) Sejam $A \in \mathcal{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $A + A^T = kI_n$.

Obtemos

$(\alpha A) + (\alpha A)^T = \alpha A + (\alpha A)^T = \alpha A + \alpha A^T = \alpha(A + A^T) = \alpha(kI_n) = (\alpha k)I_n$, com $\alpha k \in \mathbb{R}$.

Logo $\alpha A \in \mathcal{C}$.

De 1), 2), 3) e 4) concluimos que $\mathcal{C}$ é subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(b) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Como

$$\operatorname{Nuc} f = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : f(A) = 0_{n\times n}\}$$

temos que

$$A \in \operatorname{Nuc} f \Leftrightarrow f(A) = 0_{n\times n} \Leftrightarrow A + A^T = 0_{n\times n} \Leftrightarrow A^T = -A.$$

Logo $\operatorname{Nuc} f = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é hemi-simétrica}\}$.

Por outro lado dada $A \in \operatorname{Nuc} f$ temos $A^T = -A$, donde vem

$$A + A^T = A - A = 0_{n\times n} = 0I_n.$$

Assim para $k = 0 \quad A + A^\top = kI_n$ e, portanto $A \in \mathcal{C}$. Provámos então que $\operatorname{Nuc} f \subseteq \mathcal{C}$.