

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

Na resolução, mude de folha sempre quemudar de grupo.

[Cotação]

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

[0,5] (a) Calcule $\det A$ e justifique que A é invertível.

[1,0] (b) Determine os valores a e b , sabendo que $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & a \\ -3 & 7 & -5 \\ 4 & b & 6 \end{bmatrix}$ é a matriz dos complementos algébricos de A .

[1,5] (c) Apresentando todos os cálculos efectuados, determine a inversa da matriz A .

[1,0] (Sugestão: Pode utilizar a matriz $\hat{A}$ obtida na alínea anterior.)

(d) Sejam $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$. Determine a solução do sistema $AX = B$.

(Sugestão: Pode resolver o sistema utilizando a inversa da matriz simples do sistema.)

Mude de Folha

2. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$, $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - b = 0\}$ e $G = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$.

[1,0] (a) Determine, justificando, uma base de F .

[1,0] (b) Indique um conjunto de geradores e uma base do subespaço $F + G$.

[1,0] (c) Justifique que $F + G = \mathbb{R}^3$ mas que a soma não é directa.

Mude de Folha

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear cuja matriz em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, é

$$A = \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[0,5] (a) Determine, justificando, a dimensão do subespaço imagem de f .

[1,0] (b) Justifique que f é injectiva.

[1,5] (c) Seja $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2))$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Determine, indicando todos os cálculos efectuados, a matriz de mudança de base

$$P = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^2).$$

[1,0] (d) Usando a matriz encontrada na alínea (c) determine

$$B = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^3).$$

Mude de Folha

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- [1,0] (a) Verifique que $\begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores próprios da matriz A e indique a que valor próprio está, cada um deles, associado.
- [1,5] (b) Sabendo que 6 é valor próprio de A , determine uma base do subespaço próprio associado a este valor próprio.
- (c) Justifique que existe uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e indique uma matriz nessas condições.

Mude de Folha

5. Considere, em $\mathbb{R}^3$, um referencial ortonormado directo canónico $(O; e_1, e_2, e_3)$, a recta

$$\mathcal{R} : (x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(-1, 1, 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e o plano

$$\mathcal{P} : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, 1, 3) + \mu(3, 0, 1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- [0,5] (a) Determine, usando o produto externo de vectores, um vector w perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.
- [0,5] (b) Justifique que a recta $\mathcal{R}$ é paralela ao plano $\mathcal{P}$.
- [1,0] (c) Considerando $A = (2, 1, 0)$ e $B = (1, 1, 1)$ calcule o volume do paralelepípedo determinado pelo vector $\overrightarrow{AB}$ e pelos vectores directores do plano $\mathcal{P}$.

Mude de Folha

6. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

- [1,0] (a) Mostre que as matrizes A e $A^\top$ têm o mesmo polinómio característico.
- (b) Supondo que $A + A^\top = kI_n$, para algum $k \in \mathbb{K}$, mostre que:
- [1,5] i. Se α é valor próprio de A então $k - \alpha$ é valor próprio de A .
- [1,0] ii. Se k é valor próprio de A então A não é invertível.

Fim

1. (a) Calculemos o determinante de A aplicando o Teorema de Laplace à coluna 1.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(4-3) - (6-2) = -1.$$

Uma vez que $\det A = -1 \neq 0$ então a matriz A é invertível.

- (b) Sabemos que $a = \hat{A}_{13}$ e $b = \hat{A}_{32}$. Desta forma vem:

$$a = \hat{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-2) = -2 \text{ e}$$

$$b = \hat{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -1(9-0) = -9.$$

- (c) Uma vez que já sabemos o determinante de A e conhecemos a matriz dos complementos algébricos de A podemos calcular a inversa tendo em atenção que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$.

Como $\text{adj}(A) = (\hat{A})^T$ e $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 4 & -9 & 6 \end{bmatrix}$, a matriz adjunta de A é dada por

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 4 & -9 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 7 & -9 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\det A = -1$ vem

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 7 & -9 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -7 & 9 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

- (d) Como A é uma matriz invertível temos

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

$$\text{Assim, dado que } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -7 & 9 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}, \text{ vem } X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -7 & 9 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Temos $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - b = 0\} = \{(b, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\}$.

Assim, qualquer vector de F verifica: $(b, b, c) = (b, b, 0) + (0, 0, c) = b(1, 1, 0) + c(0, 0, 1)$.

Podemos então afirmar que os vectores $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ são geradores do subespaço F .

Por outro lado como são apenas dois e nenhum deles é múltiplo escalar do outro, sabemos que são linearmente independentes, e portanto temos que base de $F = ((1, 1, 0), (0, 0, 1))$.

- (b) Sabemos que um conjunto de geradores do subespaço $F + G$ é dado pela união dos geradores de F com os geradores de G . Assim, temos

$$F + G = \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle.$$

Podemos agora determinar uma base de $F + G$ a partir deste conjunto de geradores. Consideremos a matriz cujas linhas são estes 4 vectores e levemo-la à forma de escada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - \ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_4 + \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_4 - \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.})$$

Uma vez que as três primeiras linhas da matriz, correspondentes aos primeiros três vectores do conjunto de geradores de $F + G$, não se anularam, podemos afirmar que estes vectores são ainda geradores de $F + G$ e linearmente independentes, e que, portanto, constituem uma base de $F + G$. Assim,

$$\text{base de } F + G = ((1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)).$$

- (c) Uma vez que, pela alínea anterior, base de $F + G = ((1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$ podemos concluir que $\dim(F + G) = 3$. Como $F + G$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(F + G)$, concluímos que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Vejamos agora porque é que F e G não estão em soma directa. Por (a) sabemos que base de $F = ((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ e que, por isso, $\dim F = 2$. Fácilmente se vê que os geradores de G (porque são dois e nenhum deles é múltiplo escalar do outro) são linearmente independentes e que, portanto, são base de G o que implica que $\dim G = 2$. Também já vimos que $\dim(F + G) = 3$.

Pelo Teorema das dimensões sabemos que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ o que nos permite concluir que $\dim(F \cap G) = 1$.

Para F e G estarem em soma directa teríamos de ter $F + G = \mathbb{R}^3$ e $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. Como $\dim(F \cap G) = 1$ então $F \cap G \neq \{(0, 0, 0)\}$ e, portanto, F e G não estão em soma directa.

3. (a) A dimensão do subespaço imagem de f coincide com a característica de qualquer matriz da aplicação linear f . Tomando a matriz de f e levando-a à forma de escada temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - 2\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 + \frac{1}{3}\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.}).$$

Uma vez que a característica da matriz A corresponde ao número de linhas não nulas da matriz em forma de escada equivalente por linhas a A podemos afirmar que

$$r(A) = 2 = \dim(\text{Im } f).$$

- (b) Pelo Teorema da Dimensão,

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Nuc } f).$$

Dado que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ e $\dim(\text{Im } f) = 2$ então $\dim(\text{Nuc } f) = 0$. Como $\dim \text{Nuc } f = 0$ então a aplicação linear f é injectiva.

- (c) Para obter a matriz pedida começamos por determinar a imagem de cada um dos vectores da base do espaço de partida:

$$id_{\mathbb{R}^2}((1, 1)) = (1, 1)$$

$$id_{\mathbb{R}^2}((1, 2)) = (1, 2)$$

Depois escrevemos cada uma das imagens obtidas como combinação linear dos vectores da base do espaço de chegada:

$$(1, 1) = 1 \times (1, 0) + 1 \times (0, 1)$$

$$(1, 2) = 1 \times (1, 0) + 2 \times (0, 1).$$

A matriz pretendida obtem-se dispondo nas suas colunas os coeficientes obtidos para cada um dos vectores. Desta forma temos:

$$P = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d) Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} & & b.c.\mathbb{R}^2 & & b.c.\mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$f_A \circ id_{\mathbb{R}^2} = f_B$$

Uma vez que, à composição de aplicações lineares corresponde o produto das respectivas matrizes, temos

$$B = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^3) = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^2) \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3) =$$

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -2 \\ 24 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores não nulos que verificam $AX = \alpha X$, podemos concluir que são vectores próprios associados aos valores próprios 2 e -1 , respectivamente.

(h) O subespaço próprio da matriz A associado ao valor próprio 6 é dado por:

$$M_6 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 6I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Este subespaço é o conjunto das soluções do seguinte sistema homogéneo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_2 - \frac{4}{3}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{-1}{3}\ell_1, \frac{3}{13}\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_1 + \frac{1}{3}\ell_2, \ell_3 + 4\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.}).$$

O conjunto de soluções deste sistema corresponde ao seguinte conjunto

$$M_6 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como $\begin{bmatrix} b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, temos $M_6 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$. Dado que os gerador de M_6 é único e não nulo, então é linearmente independente.

Assim uma base de M_6 será $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

(c) Uma vez que A tem ordem 3 e tem 3 valores próprios distintos, então A é diagonalizável.

Assim sabemos que existe uma matriz invertível P com $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Esta matriz terá como colunas vectores próprios de A associados aos valores próprios 6, -1 e 2 respectivamente. Uma matriz P nestas condições será, por exemplo, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -9 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Sabemos que um vector w perpendicular ao plano é dado pelo produto externo dos seus vectores directores que são os vectores $(2, 1, 3)$ e $(3, 0, 1)$. Vamos calcular o produto externo destes vectores usando a menemónica do determinante:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} e_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + e_2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + e_3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1e_1 + 7e_2 - 3e_3,$$

assim, $w = e_1 + 7e_2 - 3e_3$.

- (b) A recta $\mathcal{R}$ é paralela ao plano $\mathcal{P}$ se for perpendicular ao vector perpendicular a $\mathcal{P}$.

Para verificarmos se isto se passa, teremos de ver se o vector $(-1, 1, 2)$, vector director de $\mathcal{R}$, é perpendicular ao vector w , vector perpendicular a $\mathcal{P}$.

Para verificarmos se dois vectores não nulos são perpendiculares basta verificar se o produto interno deles é nulo.

Assim, como $(-1, 1, 2) \cdot w = (-1, 1, 2) \cdot (1, 7, -3) = -1 \times 1 + 1 \times 7 + 2 \times (-3) = -1 + 7 - 6 = 0$, podemos concluir que os vectores são perpendiculares e que, portanto, a recta $\mathcal{R}$ é paralela ao plano $\mathcal{P}$.

- (c) Dados os pontos A e B , o vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 1) - (2, 1, 0) = (-1, 0, 1)$.

O volume do paralelepípedo determinado por três vectores, corresponde ao módulo do produto misto desses três vectores. Assim, considerando que os vectores directores do plano são $u = (2, 1, 3)$ e $v = (3, 0, 1)$, o volume pedido é dado pelo módulo de

$$(\overrightarrow{AB} \times u) \cdot v = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4.$$

Desta forma concluímos que o volume do paralelepípedo considerado é $|-4| = 4$.

6. (a) O polinómio característico de A é dado por $\det(A - xI_n)$ e o de $A^\top$ por $\det(A^\top - xI_n)$.

Como para qualquer matriz B , $\det B = \det B^\top$ então temos

$$\det(A - xI_n) = \det((A - xI_n)^\top) = \det(A^\top - x(I_n)^\top) = \det(A^\top - xI_n),$$

concluindo assim que os polinómios característicos são iguais.

- (b) i. Se α é valor próprio da matriz A então existe $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$, não nulo, tal que

$$AX = \alpha X.$$

Dado que $A + A^\top = kI_n$ então, para o vector próprio X de A associado ao valor próprio α , tem-se:

$$(A + A^\top)X = (kI_n)X \Leftrightarrow AX + A^\top X = kX \Leftrightarrow \alpha X + A^\top X = kX \Leftrightarrow A^\top X = (k - \alpha)X,$$

o que, dado que X é não nulo, nos permite concluir que $k - \alpha$ é valor próprio de $A^\top$. Pela alínea (a), sabemos que os polinómios característicos de A e de $A^\top$ são iguais e que, portanto, os valores próprios também são iguais, logo $k - \alpha$ é ainda valor próprio de A .

- ii. Se k é valor próprio de A então, pela alínea anterior, $k - k = 0$ é valor próprio de A . Ora, se zero é valor próprio de A , então, como sabemos, A não é invertível.