FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Primeiro Teste – 23 de Novembro de 2011

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$,

$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e D uma matriz equivalente por linhas a C.

[2,0] (a) Justifique se alguma das matrizes A ou B não está em forma de escada ou em forma de escada reduzida. Indique, justificando, a caracteristíca de A e a característica de B.

[1,5] (b) A coluna 2 de uma matriz F de elementos reais é $(1, -1, 0, 1)$. Justifique que é possível efectuar o produto AF e determine o valor do elemento $(AF)_{12}$.

[2,0] (c) Indique a forma de escada reduzida de D e conclua, justificando, que D é invertível.

[2,0] (d) Sabendo que $C \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} D$ e que $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ determine, justificando, a matriz D^{-1}.

Mude de Folha

2. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 sobre $\mathbb{R}$, $AX = B$, dado pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

[0,5] (a) Indique as equações que formam o sistema $AX = B$.

[1,5] (b) Indique, justificando, para que valores de α e β o sistema $AX = B$ é possível indeterminado, com grau de indeterminação 1.

[1,5] (c) Justifique a seguinte afirmação "Se $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ então o conjunto das soluções do sistema $AX = B$ é o conjunto vazio".

[2,0] (d) Verifique, utilizando matrizes, que, para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ as sequências $(1, 0, 1, 1)$ e $(2, 1, 2, 1)$ são soluções do sistema $AX = B$. Justifique que, neste caso, o sistema é possível indeterminado.

Mude de Folha

3. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Verifique que $\det(B) = -1$ e conclua que B é invertível.

[1,0] (b) Determine, apresentando todos os cálculos efectuados, $B(2|2)$, $B(3|4)$, $\widehat{B}_{22}$ e $\widehat{B}_{34}$.

[2,5] (c) Sabendo que $\widehat{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & \widehat{B}_{22} & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & \widehat{B}_{34} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, utilize esta matriz para calcular a inversa de B.

Mude de Folha

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Mostre que:

[1,0] (a) $\widehat{A}$ é uma matriz simétrica.

[1,5] (b) $A\widehat{A} = (\det A)I_n$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Primeiro Teste – 23 de Novembro de 2010

Uma resolução com notas explicativas

---

1. (a) A matriz A está em forma de escada mas não está em forma de escada reduzida uma vez que os pivôs da matriz A não são 1 e os restantes elementos das colunas dos pivôs não são todos nulos. A matriz B está em forma de escada e em forma de escada reduzida.

Uma vez que ambas as matrizes estão em forma de escada a sua característica corresponde ao número de linhas não nulas de cada uma delas. Assim, $\mathrm{r}(A) = 4$ e $\mathrm{r}(B) = 2$.

(b) A matriz A tem 4 colunas e, como o número de elementos da coluna 2 de F é 4, podemos afirmar que o número de linhas de F é 4. Uma vez que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de F, é possível efectuar o produto AF.

O elemento $(AF)_{12}$ é calculado utilizando a linha 1 da matriz A e a coluna 2 da matriz F, que são dadas. Assim

$$(AF)_{12} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 3 \times 0 + (-1) \times 1 = 4 - 1 + 0 - 1 = -1.$$

(c) Como a matriz D é equivalente por linhas à matriz C, a sua forma de escada reduzida vai ser igual à de C. Determinemos a forma de escada reduzida de C:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\ell_3]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 - 2\ell_3]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_2]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + \ell_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Como a forma de escada reduzida de C é a matriz I_n também a forma de escada reduzida de D é a matriz I_n e, por isso, podemos afirmar que a matriz D é invertível.

(d) Como $C \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} D$ podemos afirmar que $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot C$, logo

$$D^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot C \right)^{-1} = C^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Dado que a inversa de uma matriz elementar do Tipo II é a própria matriz vem

$$D^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Tendo em atenção que os elementos da matriz simples nos dão os coeficientes das incógnitas em cada uma das equações do sistema e os elementos da matriz B os termos independentes de cada uma dessas equações temos:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ (\alpha^2 - 1)x_2 + x_4 = 1 \\ (\alpha - 1)x_3 = \beta \end{cases}.$$

(b) Para determinarmos para que valores de α e β o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1 é necessário construir a matriz ampliada do sistema e levá-la à forma de escada para, através da característica da matriz simples e da característica da matriz ampliada e do número de incógnitas do sistema, podermos determinar os casos em que ele é possível indeterminado, com grau de indeterminação 1.

Ao construir a matriz ampliada do sistema podemos observar que esta já se encontra em forma de escada,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha^2-1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & \beta \end{array}\right] \quad \text{(f.e.)}.$$

Assim temos

- Se $\alpha = -1$ temos $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ (f.e.).
  Neste caso , vem $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B]) = 3 < n = 4$ para qualquer β e, portanto, o sistema é possível indeterminado com g.i.$= n - \mathrm{r}(A) = 4 - 3 = 1$.
- Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ temos $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B]) = 3 < n = 4$ para qualquer β e, portanto, o sistema é possível indeterminado com g.i.$= n - \mathrm{r}(A) = 4 - 3 = 1$.
- Se $\alpha = 1$ temos $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right]$.
  - Para $\beta \neq 0$ vem $\mathrm{r}(A) = 2 < \mathrm{r}([A|B]) = 3$, logo o sistema é impossível.
  - Para $\beta = 0$ vem $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B]) = 2 < n$ e, portanto, o sistema é possível indeterminado com g.i.$= n - \mathrm{r}(A) = 4 - 2 = 2$.

Podemos então concluir que o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1 se $\alpha \neq 1$ para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$.

(c) Sabemos que o conjunto das soluções de um sistema é o conjunto vazio se o sistema for impossível.

Vimos na alínea (b) que o sistema era impossível se $\beta \neq 0$ e $\alpha = 1$.

Então, para $\alpha = 1$ e $\beta = 2 \neq 0$, o sistema é impossível e, portanto,o conjunto de soluções do sistema é o conjunto vazio.

(d) Para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ a matriz simples do sistema é $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A sequência $(1, 0, 1, 1)$ é solução do sistema se $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ora $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo a sequência $(1, 0, 1, 1)$ é solução do sistema.

A sequência $(2, 1, 2, 1)$ é solução do sistema se $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ora $A\begin{bmatrix}2\\1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$. Logo a sequência $(2,1,2,1)$ é solução do sistema.

Uma vez que o sistema tem mais do que uma solução é possível indeterminado.

3. (a) Calculemos, em primeiro lugar, o determinante da matriz B.

$$\det B = \begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\0 & -1 & 2 & 1\\1 & 1 & -1 & 0\\0 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix} \underset{\ell_3-\ell_1}{=} \begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\0 & -1 & 2 & 1\\-1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{\ell_3}{=}} (-1)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 1\\-1 & -1 & -1\end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{\ell_1}{=}}$$

$$= -\left(1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{vmatrix} + (-1)\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}-1 & 1\\-1 & -1\end{vmatrix}\right) =$$

$$= -\left(1\times(-2+1)+1\times(1+1)\right) = -(-1+2) = -1.$$

Uma vez que o determinante da matriz B é diferente de zero podemos afirmar que a matriz é invertível.

(b) Por definição $B(i|j)$ é a matriz que se obtém de B quando se elimina a linha i e a coluna j, e $\widehat{B}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(B(i|j))$. Assim temos

- $B(2|2) = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\end{bmatrix}$

  $\widehat{B}_{22} = (-1)^{2+2}\det(B(2|2)) = \begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{c_3}{=}} (-1)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & -1\end{vmatrix} =$
  $= -(2\times(-1)-1\times(-1)) = 1.$

- $B(3|4) = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & -1 & 2\\0 & -1 & -1\end{bmatrix}$ e

  $\widehat{B}_{34} = (-1)^{3+4}\det(B(3|4)) = -\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\0 & -1 & 2\\0 & -1 & -1\end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{c_1}{=}} = -2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\-1 & -1\end{vmatrix} =$
  $= -2\times(1+2) = -6.$

(c) Uma vez que temos calculados os valores de $\widehat{B}_{22}$ e de $\widehat{B}_{34}$, podemos dizer que

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix}-1 & -1 & -2 & 3\\0 & 1 & 1 & -2\\1 & 2 & 4 & -6\\0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Como $B^{-1} = \frac{1}{\det B}\operatorname{adj} B$ e $\operatorname{adj} B = \widehat{B}^\top$, vem

$$B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -2 & 3\\0 & 1 & 1 & -2\\1 & 2 & 4 & -6\\0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}^\top = -1\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 2 & 1\\-2 & 1 & 4 & 1\\3 & -2 & -6 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\1 & -1 & -2 & -1\\2 & -1 & -4 & -1\\-3 & 2 & 6 & 1\end{bmatrix}.$$

4. (a) Sabemos que se A é simétrica então $A = A^\top$ e, portanto, para qualquer $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $A_{ij} = A_{ji}$.

Por definição sabemos que $A(i|j)$ é a matriz que se obtém de A quando se elimina a linha i e a coluna j, e $\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$.

Temos por isso que

$\det A(i|j) =$ (porque, para qualquer matriz A, $((A(i|j))^\top = A^\top(j|i)$ e $\det A = \det A^\top$.)

$= \det A^\top(j|i) =$ (porque A é simétrica e, portanto, $A = A^\top$.)

$= \det A(j|i)$.

Assim para qualquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ temos

$$\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i|j)) = (-1)^{j+i} \det(A(j|i)) = \widehat{A}_{ji},$$

logo $\widehat{A}$ é simétrica.

(b) Como $\operatorname{adj} A = \widehat{A}^\top$ e $\widehat{A}$ é simétrica, temos que $\operatorname{adj} A = \widehat{A}$. Sabemos que $A \operatorname{adj} A = (\det A) I_n$. Assim, $A\widehat{A} = A \operatorname{adj} A = (\det A) I_n$.