FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Segundo Teste – 18 de Janeiro de 2012

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ a aplicação linear tal que

$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \qquad f(a,b,c) = ax^2 + (a+b)x + a - b.$$

[3,0] (a) Determine uma base do núcleo de f e a dimensão da imagem de f. Conclua, justificando, que f não é injectiva.

[4,0] (b) Em $\mathbb{R}^3$ considere a base

$$\mathcal{B} = ((2,1,0),(0,1,0),(1,1,1))$$

e em $\mathbb{R}_2[x]$ a base

$$\mathcal{B}' = \left(1, x, x^2\right).$$

Determine, indicando todos os cálculos efectuados, a matriz

$$\mathcal{M}\left(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'\right).$$

Mude de Folha

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[3,0] (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[2,5] (b) Determine uma base do subespaço próprio associado ao valor próprio 1 e indique a multiplicidade geométrica deste valor próprio.

[1,5] (c) Sabendo que 5 é valor próprio de A conclua, justificando, que A é diagonalizável e indique uma matriz diagonal semelhante a A.

Mude de Folha

3. Considere, em $\mathbb{R}^3$, um referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ e os pontos $A = (1,3,5)$, $B = (1,2,3)$ e $C = (2,2,1)$.

[1,0] (a) Determine um vector w perpendicular aos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ com norma 4.

[0,5] (b) Indique, justificando, o valor do co-seno do ângulo que o vector w faz com o vector e_2.

[1,0] (c) Determine o volume do paralelepípedo determinado pelas arestas $[OA]$, $[OB]$ e $[OC]$.

Mude de Folha

4. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e (u_1, u_2, u_3, u_4) uma base de E.

Considere os vectores de E:

$$v_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \quad v_2 = u_1 + u_2 + u_3 \quad v_3 = u_1 + u_2 \quad v_4 = u_1.$$

[0,5] (a) Justifique que (v_1, v_2, v_3, v_4) é uma base de E.

[1,5] (b) Considere os subespaços de E:

$$F = \langle u_3, u_4 \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle u_2, v_3, v_4 \rangle.$$

Justifique que $E = F \oplus G$.

[1,5] (c) Determine, justificando, uma aplicação linear $f : E \longrightarrow E$ tal que:

$$\operatorname{Nuc} f = \langle u_2, u_3 \rangle, \quad \operatorname{Im} f = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{e} \quad f(u_4) = u_4.$$

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Segundo Teste – 18 de Janeiro de 2012

Uma resolução com notas explicativas

---

1. (a) O núcleo de f é dado por

$$\operatorname{Nuc} f = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(a,b,c) = 0x^2 + 0x + 0\right\}.$$

Desta forma vemos que

$$f(a,b,c) = 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow ax^2 + (a+b)x + a - b = 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a+b = 0 \\ a-b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Assim, $\operatorname{Nuc} f = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0 \wedge b = 0\right\} = \{(0,0,c) : a, b \in \mathbb{R}\} = \langle(0,0,1)\rangle$.

Como $(0,0,1)$ é gerador do núcleo de f e é um único vector não nulo, é linearmente independente e, portanto, base $\operatorname{Nuc} f = ((0,0,1))$.

Pelo Teorema da Dimensão sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f$. Como sabemos $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e, dado que, $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$, então $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Uma aplicação linear é injectiva se, e só se, a dimensão do seu núcleo é zero. Neste caso, $\dim \operatorname{Nuc} f = 1 \neq 0$ logo f não é injectiva.

Uma aplicação linear é sobrejectiva se, e só se, a dimensão do subespaço imagem é igual à dimensão do espaço de chegada. Dado que $\dim \operatorname{Im} f = 2 \neq \dim R_2[x] = 3$ concluimos que f também não é sobrejectiva.

(b) Para obter a matriz pedida começamos por determinar a imagem de cada um dos vectores da base do espaço de partida:

$f(2,1,0) = 2x^2 + (2+1)x + (2-1) = 2x^2 + 3x + 1$

$f(0,1,0) = 0x^2 + (0+1)x + (0-1) = 0x^2 + x - 1$

$f(1,1,1) = 1x^2 + (1+1)x + (1-1) = 1x^2 + 2x + 0.$

Depois escrevemos cada uma das imagens obtidas como combinação linear dos vectores da base do espaço de chegada:

$f(2,1,0) = 2x^2 + 3x + 1 = 1 \times (1) + 3 \times (x) + 2 \times (x^2)$

$f(0,1,0) = 0x^2 + x - 1 = -1 \times (1) + 1 \times (x) + 0 \times (x^2)$

$f(1,1,1) = 1x^2 + 2x + 0 = 0 \times (1) + 2 \times (x) + 1 \times (x^2).$

A matriz pretendida obtem-se dispondo nas suas colunas os coeficientes obtidos para cada um dos vectores. Desta forma temos:

$$\mathcal{M}\left(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Os valores próprios da matriz A, são os zeros do seu polinómio característico. Comecemos por determinar o polinómio característico de A, $p_A(x) = |A - xI_3|$.

$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 \\ 2 & 1-x & 4 \\ 1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{c_2}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (1-x) \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)((3-x)^2 - 4) =$
$(1-x)(3-x-2)(3-x+2) = (1-x)^2(5-x)$.

Os valores próprios da matriz A são então o 1 e o 5 em que $\text{ma}(5) = 1$ e $\text{ma}(1) = 2$.

(b) O subespaço próprio da matriz A associado ao valor próprio 1 é dado por:

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : (A - 1I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Este subespaço é o conjunto das soluções do seguinte sistema homogéneo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 - \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 - \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O conjunto de soluções deste sistema corresponde ao conjunto de soluções de uma única equação $a + 2c = 0 \Leftrightarrow a = -2c$. Assim,

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : a = -2c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2c \\ b \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como $\begin{bmatrix} -2c \\ b \\ c \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos $M_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. Dado que os geradores de M_1 são apenas dois e nenhum deles é múltiplo escalar do outro, então são linearmente independentes.

Assim uma base de M_1 será $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ e, portanto, $\dim M_1 = 2$.

Como a multiplicidade geométrica de um valor próprio é a dimensão do subespaço próprio que lhe está associado vem

$$\text{mg}(1) = \dim(M_1) = 2.$$

(c) Como 5 é valor próprio de A então $\dim M_5 \geq 1$ e, por isso, $\text{mg}(5) \geq 1$. Como vimos na alínea anterior $\text{mg}(1) = 2$, mas como $\text{mg}(5) + \text{mg}(1) \leq 3 =$ ordem da matriz A, concluimos que $\text{mg}(5) = 1$.

Temos então que $\text{mg}(5) + \text{mg}(1) = 1 + 2 = 3$ =ordem da matriz A, logo A é diagonalizável.

Uma matriz diagonal semelhante a A terá na diagonal principal os valores próprios da matriz A que aparecerão tantas vezes quanto a sua multiplicidade algébrica. Assim, uma matriz diagonal semelhante a A será, por exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Sabemos que $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$ e que $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BC}$. Assim, o vector w pretendido terá a direcção de $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ embora possa ter uma norma diferente da deste vector.

Temos:
$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,2,3)-(1,3,5)=(0,-1,-2)$
$\overrightarrow{BC}=C-B=(2,2,1)-(1,2,3)=(1,0,-2)$.
Atendendo a que $\overrightarrow{AB}=-e_2+2e_3$ e $\overrightarrow{BC}=e_1+2e_3$ vamos calcular o produto externo de $\overrightarrow{AB}$ por $\overrightarrow{BC}$ usando a menemónica do determinante:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix} \underset{\ell_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} e_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix} + e_2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix} + e_3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 2e_1-2e_2+e_3,$$

assim, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=2e_1-2e_2+e_3$.
Ora, a norma deste vector é $||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}||=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9}=3$.
Sabemos que um vector unitário com a direcção de $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ é dado por

$$\frac{1}{||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}||}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})=\frac{1}{3}(2e_1-2e_2+e_3)=\frac{2}{3}e_1-\frac{2}{3}e_2+\frac{1}{3}e_3.$$

Um vector w nas condições pretendidas será dado por

$$4.\text{vers}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})=4\left(\frac{2}{3}e_1-\frac{2}{3}e_2+\frac{1}{3}e_3\right)=\frac{8}{3}e_1-\frac{8}{3}e_2+\frac{4}{3}e_3.$$

(b) O co-seno de um vector com um dos vectores da base fixa no referencial ortonormado corresponde à coordenado do versor do vector relativamente a esse mesmo vector da base.
Como o versor de w é ainda o versor de $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ temos que vers$w=\frac{2}{3}e_1-\frac{2}{3}e_2+\frac{1}{3}e_3$.
Assim, $\cos(\widehat{w,e_2})=-\frac{2}{3}$.

(c) O volume do paralelepípedo determinado pelas arestas $[OA]$, $[OB]$ e $[OC]$ é dado pelo módulo do produto misto dos vectores $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.
Uma vez que $O=(0,0,0)$ temos

$$\overrightarrow{OA}=1e_1+3e_2+5e_3,\quad \overrightarrow{OB}=e_1+2e_2+3e_3\quad\text{e}\quad \overrightarrow{OC}=2e_1+2e_2+e_3.$$

Assim, o produro misto é dado por:
$$(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})|\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix} \underset{c_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}+1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}+2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=$$
$=-4+7-2=1$.
Logo, o volume do paralelepípedo é $|1|=1$.

4. (a) Como (u_1,u_2,u_3,u_4) é uma base de E, sabemos que $\dim E=4$. Uma vez que a sequência dada tem 4 vectores, para provarmos que esta sequência é uma base de E, basta garantir que é linearmente independente.

As sequências de coordenadas de cada um dos vectores v_1,v_2,v_3 e v_4 na base (u_1,u_2,u_3,u_4) são, respectivamente, $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,0)$ e $(1,0,0,0)$. Tomando estas sequências, pondo-as nas linhas de uma matriz e levando-a à forma de escada tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_1 \leftrightarrow \ell_4 \\ \ell_2 \leftrightarrow \ell_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_4 - \ell_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_3 - \ell_2 \\ \ell_4 - \ell_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_4 - \ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

Dado que a forma de escada da matriz das coordenadas não tem linhas nulas, os vectores de onde partimos são linearmente independentes e portanto constituem uma base de E.

(b) Uma forma de garantir que $E = F \oplus G$ é verificar que $F + G = E \quad \text{e} \quad F \cap G = \{0_E\}$.

Sabemos que $F + G = \langle u_3, u_4, u_2, v_3, v_4 \rangle = \langle u_3, u_4, u_2, u_1 + u_2, u_1 \rangle$.

Como $u_1 + u_2$ é combinação linear de u_1 e u_2 , temos ainda que $F + G = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle = E$.

Por outro lado, temos $\dim F = 2$ e como $G = \langle u_2, v_3, v_4 \rangle = \langle u_2, u_1 + u_2, u_1 \rangle = \langle u_2, u_1 \rangle$, $\dim G = 2$. Pelo Teorema das dimensões sabemos que

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G),$$

dado que $\dim(F + G) = 4$, $\dim F = 2$ e $\dim G = 2$, concluimos que $\dim(F \cap G) = 0$ e que, portanto, $F \cap G = \{0_E\}$.

Podemos então afirmar que $E = F \oplus G$.

(c) Pelo Teorema da Extensão Linear sabemos que uma aplicação linear fica perfeitamente determinada através das imagens dos vectores de uma base do espaço de partida.

Considerando a base de E, (u_1, u_2, u_3, u_4) podemos, através das imagens dos seus vectores, definir a aplicação pedida. Uma vez que pretendemos que $\mathrm{Nuc}\, f = \langle u_2, u_3 \rangle$ então $f(u_2) = 0_E$ e $f(u_3) = 0_E$ e, como nos é pedido, $f(u_4) = u_4$.

Para garantirmos que $\mathrm{Im}\, f = \langle v_1, v_2 \rangle$ é suficiente que, por exemplo façamos

$$f(u_1) = v_2 = u_1 + u_2 + u_3.$$

De facto, como $\mathrm{Im}\, f = \langle f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4) \rangle = \langle v_2, 0_E, 0_E, u_4 \rangle$ e o vector 0_E não é necessário para gerar um subespaço, temos $\mathrm{Im}\, f = \langle v_2, u_4 \rangle = \langle u_1 + u_2 + u_3, u_4 \rangle$.

Por outro lado, sabemos que se, numa sequência geradora substituirmos um vector pela sua soma com outro da sequência, a sequência obtida gera o mesmo subespaço. Temos então que $\mathrm{Im}\, f = \langle u_1 + u_2 + u_3, u_4 \rangle = \langle u_1 + u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$. Desta forma $\mathrm{Im}\, f$ verifica a condição pedida uma vez que a troca da ordem dos vectores numa sequência geradora não altera o subespaço gerado.

Podemos então afirmar que a aplicação linear definida por

$$f(u_1) = v_2, f(u_2) = 0_E, f(u_3) = O_E \;\text{ e }\; f(u_4) = u_4$$

está nas condições pretendidas.