FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

Quarto Teste – 21 de Dezembro de 2012

Duração: 1 hora

**PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL**

**Nome (completo):** ______________________________

**Número de aluno:** | | | | | |

**Atenção**

**Esta prova consiste em 8 grupos:**

- **Grupos 1 a 5 - Escolha múltipla**
- **Grupos 6 e 7 - Para completar, no enunciado, sem apresentar justificações.**
- **Grupo 8 - Para responder justificando todas as afirmações.**

**O enunciado da prova é composto por 3 folhas que não podem ser desagrafadas. Quando terminar a prova tem de entregar o enunciado completo.**

**Em cada um dos Grupos 1 a 5 apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.**

**Para cada um destes grupos a cotação atribuída é a seguinte:**

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: +2,0 valores;**
- **Se responder erradamente: −0,66 valores.**

**A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.**

Grelha de Respostas

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | | | X | |
| **2.** | | | | X |
| **3.** | | X | | |
| **4.** | | X | | |
| **5.** | | | | X |

**1.** Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ é uma aplicação linear então $f(2,4,6)=f(0,4,6)+f(2,0,0)$.

B Se $g:\mathbb{R}^3\to\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é uma aplicação linear então $g(0,0,0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$.

C A aplicação $h:\mathbb{R}^3\to\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $h(a,b,c)=\begin{bmatrix}2a&b-c\\0&1-c\end{bmatrix}$, para qualquer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, é uma aplicação linear.

D Se $t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$ é uma aplicação linear então $t(2,0,6)=2t(1,0,3)$.

Continua no verso desta folha

**2.** Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação linear sobrejectiva então $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$.

B Se $g : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é uma aplicação linear injectiva então $\dim \operatorname{Im} g = 3$.

C Se $h : \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to E$ é uma aplicação linear bijectiva então $\dim E = 6$.

D Existe uma aplicação linear $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ injectiva.

**3.** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(a,b,c) = (b-c, 0),$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\operatorname{Nuc} f = \{(a,c,c) : \ a,c \in \mathbb{R}\}$.

B Se $\mathcal{B} = \big((0,-1),(1,0)\big)$ então $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, onde b.c. representa base canónica.

C $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, onde b.c. representa base canónica.

D $\big((1,0)\big)$ é uma base de $\operatorname{Im} f$.

**4.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz que tem apenas os valores próprios 0 e 2.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $|A - 3I_n| \neq 0$.

B A matriz $A$ é invertível.

C Se $p(x)$ é o polinómio característico de $A$ então $p(2) = 0$.

D Se $A$ é diagonalizável então $\operatorname{mg}(0) + \operatorname{mg}(2) = n$.

**5.** Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A matriz $A$ tem o valor próprio 2 (com multiplicidade algébrica 2) e o valor próprio 0 (com multiplicidade algébrica 1).

B A matriz $A$ tem o valor próprio 2 e o subespaço próprio de $A$ associado ao valor próprio 2 é $M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ b \\ c \end{bmatrix} : \ b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

C A matriz $A$ tem o valor próprio 0 e uma base do subespaço próprio de $A$ associado ao valor próprio 0 é $\left( \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

D A matriz $A$ não é diagonalizável.

Continua na próxima folha

**PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL**

**Nome (completo):** ____________________

**Número de aluno:** | | | | | |

**Nas alíneas dos Grupos 6 e 7 indique a resposta, no espaço respectivo, não apresentando quaisquer cálculos ou justificações. Nestas questões a cotação atribuída a cada alínea é a seguinte:**

- **Se responder correctamente:** $1,0$ **valores.**
- **Se não responder ou responder erradamente:** $0$ **valores.**

[Cotação]

**6.** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(1,0,0) = (1,1), \quad f(0,1,0) = (0,0) \quad \text{e} \quad f(0,0,1) = (0,-1).$$

[1,0] (a) Para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tem-se $f(a,b,c) = (a, a-c)$ .

[1,0] (b) $\dim \operatorname{Im} f = 2$ .

[1,0] (c) A aplicação $f$ é injectiva? Não (Sim/Não)

**7.** Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

[1,0] (a) $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ é um vector próprio de $A$ associado ao valor próprio $0$ .

[1,0] (b) $\begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix}$ é um vector próprio de $A$ associado ao valor próprio $2$ .

[1,0] (c) A matriz $A$ é diagonalizável? Sim (Sim/Não)

[1,0] (d) Se $P = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ então $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}\mathbf{2} & 0 & 0\\0 & \mathbf{0} & 0\\0 & 0 & \mathbf{2}\end{bmatrix}$.

Continua na próxima folha

**PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL**

**Nome (completo):** ______________________________

**Número de aluno:** | | | | | |

**No Grupo 8 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.**

[Cotação]

[3,0] **8.** Seja $f : E \to E'$ uma aplicação linear injectiva. Demonstre que se $(u_1, \ldots, u_r)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de $E$ então $(f(u_1), \ldots, f(u_r))$ é uma sequência linearmente independente de vectores de $E'$.

**Resposta ao Grupo 8**:

Utilizemos o Critério de Independência Linear para demonstrar que os vectores $f(u_1), \ldots, f(u_r)$ são linearmente independentes.

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ escalares tais que

$$\alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_r f(u_r) = 0_{E'}.$$

Como $f$ é linear tem-se

$$\alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_r f(u_r) = f(\alpha_1 u_1) + \cdots + f(\alpha_r u_r) = f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r) = 0_{E'} = f(0_E),$$

isto é,

$$f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r) = f(0_E).$$

Como $f$ é injectiva podemos afirmar que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E.$$

Dado que, por hipótese, $u_1, \ldots, u_r$ são vectores linearmente independentes concluímos, pelo Critério de Independência Linear, que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Logo $f(u_1), \ldots, f(u_r)$ são linearmente independentes.

Fim