FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Recurso – 14 de Janeiro de 2016

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -k \\ 2 & 1 & k+1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, onde $k \in \mathbb{R}$.

[1,0] (a) Determine para que valores de k a característica da matriz A é igual a 3.

[1,0] (b) Para $k = 1$ resolva o sistema homogéneo $AX = 0$, indicando uma base do seu conjunto solução.

[1,0] (c) Considere $k = 2$. Neste caso a matriz A é invertível, tendo-se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Utilizando a matriz A^{-1} determine o conjunto solução do sistema $AX = B$, onde $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

[1,0] (d) Para $k = -2$ considere o sistema $AX = C$, onde $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Neste caso tem-se que $|A| = 6$. Determine a solução do sistema usando a regra de Cramer.

Mude de Folha

2. Considere a base de $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (-x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x^2 + x)$, a base de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = ((-1, 1), (1, 0))$, e a aplicação linear $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(ax^2 + bx + c) = (-a + c, b),$$

para todo o $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Seja $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

[1,5] (a) Determine a matriz A.

[1,0] (b) Determine uma base do Nuc f e indique, justificando, se f é injectiva.

[1,0] (c) A partir da dimensão de Im f indique, justificando, se f é sobrejectiva.

[1,5] (d) Considere a base $\mathcal{B}_1 = (2x^2, 2x + 2, 1)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Determine a matriz de mudança de base $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}') = AP$.

Mude de Folha

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[1,0] (a) Justifique que $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são vectores próprios da matriz A e indique a que valor próprio está, cada um deles, associado.

[1,0] (b) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,0] (c) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios da matriz A.

[1,0] (d) Verifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.

[1,0] (e) Considerando a matriz P obtida na alínea anterior, determine $P^{-1}A^{17}P$.

Mude de Folha

4. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere as rectas r e s definidas por:

$$r:\ (x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(1,-1,-1),\quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s:\ \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

[1,0] (a) Verifique que as rectas r e s são estritamente paralelas.

[1,0] (b) Escreva uma equação geral do plano que contém r e s.

[1,0] (c) Determine a distância entre r e s.

Mude de Folha

5. Seja $A \in M_{n\times n}$. Seja α um valor próprio de A^2 tal que $\alpha \neq 0$ e $ma(\alpha) = 1$. Seja X um vector próprio de A^2 associado ao valor próprio α. Mostre que:

[1,5] (a) AX é vector próprio de A^2 associado ao valor próprio α.

[1,5] (b) X é vector próprio de A.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Recurso – 14 de Janeiro de 2016

Uma resolução com notas explicativas

1. (a) A matriz A não está em forma de escada.

$$A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -k \\ 2 & 1 & k+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -k \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+2l_1]{l_2+kl_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k^2+1 \\ 0 & 1 & -k+1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k^2+1 \\ 0 & 0 & k^2-k \end{bmatrix}}_{(f.e.)}.$$

Sabendo que a característica da matriz A, $r(A)$, é dada pelo número de linhas não nulas de uma sua forma de escada, então característica de A é 3 se e só se

$$k^2-k\neq 0 \Leftrightarrow k(k-1)\neq 0 \Leftrightarrow k\neq 0 \wedge k\neq 1,$$

ou seja, se e só se $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

(b) Para $k=1$, a matriz ampliada do sistema $AX=0$ é

$$[A|0]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

que, de acordo com a resolução da alínea a), é equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O sistema $AX=0$ é assim equivalente a

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}, \quad z\in\mathbb{R},$$

cujo conjunto solução é

$$CS=\{(-z,0,z) : z\in\mathbb{R}\}=\langle(-1,0,1)\rangle.$$

Como $(-1,0,1)$ é um vector diferente de $(0,0,0)$ então a sequência $((-1,0,1))$ é linearmente independente, logo constitui uma base de CS.

(c) Se a matriz A é invertivel então o sistema $AX=B$ é possível e determinando sendo a solução dada por

$$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B,$$

ou seja,

$$X=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $k=2$ o conjunto solução do sistema $AX=B$ é então

$$CS=\{(0,1,0)\}.$$

(d) Para $k=-2$ a matriz A é dada por

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Como $|A|=6$ então a matriz A é invertível e o sistema $AX=C$ é de Cramer. A sua solução (única) pode então ser obtida recorrendo-se à regra de Cramer que garante que é da forma (x,y,z), onde

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}}{|A|},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}}{|A|},\quad z=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}}{|A|}.$$

Calculando os 3 determinantes que surgem em numerador obtém-se (por exemplo usando a regra de Sarrus pois tratam-se de matrizes de ordem 3):

- $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0+4+0-0-4-0=0$;
- $\begin{vmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=0+8-2-0+8-2=16-4=12$;
- $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=0+0-2-0-0+2=0$;

Logo,

$$x=\frac{0}{6}=0,\quad y=\frac{12}{6}=2,\quad z=\frac{0}{6}=0,$$

e $(x,y,z)=(0,2,0)$ é a única solução do sistema.

2. (a) Atendendo a que:

$$\begin{aligned}f(-x^2+x+1)&=(2,1)=1(-1,1)+3(1,0)\\ f(x^2+x+1)&=(0,1)=1(-1,1)+1(1,0)\\ f(x^2+x)&=(-1,1)=1(-1,1)+0(1,0)\end{aligned}$$

Podemos obter a matriz pretendida dispondo por colunas os coeficientes anteriormente obtidos. Assim teremos: $A=\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

(b) Sabemos que $\operatorname{Nuc} f=\{ax^2+bx+c : f(ax^2+bx+c)=(0,0)\}$.

Ora $f(ax^2+bx+c)=(0,0)\Leftrightarrow(-a+c,b)=(0,0)\Leftrightarrow a=c\wedge b=0$.

Assim $\operatorname{Nuc} f=\{ax^2+bx+c : a=c\wedge b=0\}=\{cx^2+c : c\in\mathbb{R}\}=\langle x^2+1\rangle$.

Como x^2+1 é um único vector não nulo então é linearmente independente. Assim uma base do $\operatorname{Nuc} f$ é, por exemplo, (x^2+1).

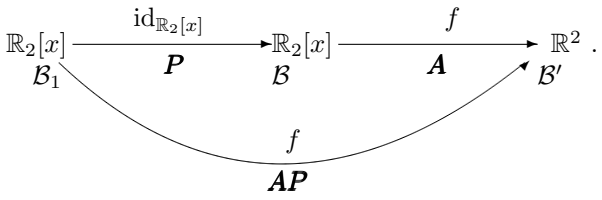
Para f ser injectiva teríamos de ter $\operatorname{Nuc} f=\{0x^2+0x+0\}$. Como tal não acontece podemos concluir que f não é injectiva.

(c) Pelo Teorema da dimensão sabemos que

$$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim \mathrm{Nuc}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow 3 = 1 + \dim \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = 2.$$

Como uma aplicação linear é sobrejectiva se, e só se, a dimensão do espaço imagem for igual à dimensão do espaço de chegada podemos concluir que, neste caso, f é sobrejectiva pois a dimensão do espaço de chegada é $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \dim \mathrm{Im}\, f = 2$.

(d) Esquematicamente temos:



Uma vez que $f = f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[x]}$ podemos afirmar que $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}') = PA$ onde P é a matriz de mudança de base $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[x]}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B})$.

Atendendo a que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[x]}(2x^2) = (2x^2) = -1(-x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1) + 0(x^2 + x)\\
&\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[x]}(2x + 2) = (2x + 2) = 1(-x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1) + 0(x^2 + x)\\
&\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[x]}(1) = (1) = 0(-x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1) - 1(x^2 + x).
\end{aligned}$$

Podemos afirmar que a matriz de mudança de base $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[x]}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = P.$

3. (a) Como $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ então $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 1.

Como $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ então $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio -1.

(b) Os valores próprios de A são as soluções da equação característica $\det(A - xI_3) = 0$ na indeterminada x. Ora

$$\det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} -3-x & 0 & -2 \\ -4 & -1-x & -4 \\ 4 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (-1-x)\begin{vmatrix} -3-x & -2 \\ 4 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+1)[(-3-x)(3-x) - 4(-2)] = -(x+1)(x^2-1) = -(x-1)(x+1)^2$$

pelo que 1 e -1 são os valores próprios de A.

O valor próprio 1 tem multiplicidade algébrica 1 e o valor próprio -1 tem multiplicidade algébrica 2.

(c) Como $1 \leq \text{m.g.}(1) \leq \text{m.a.}(1) = 1$ concluímos que a dimensão de M_1, o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1, é 1. (i.e., $\dim(M_1) = \text{m.g.}(1) = 1$). Ora $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \in M_1$ e é linearmente independente pois é um vector próprio de A associado ao valor próprio 1. Concluímos assim que $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_1.

O subespaço próprio associado ao valor próprio -1 é

$$M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1} : AX = -1.X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1} : (A + 1I_3)X = 0\}.$$

Resolvendo o sistema $(A + 1I_3)X = 0$, com $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, vem

$$[A + 1I_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-\frac{1}{2})l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 - 4l_1]{l_2 + 4l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ou seja,

$$x + z = 0 \Leftrightarrow x = -z.$$

Assim,

$$M_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1} : x = -z \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Como a sequência $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é geradora de M_{-1} e é linearmente independente (note-se que $r\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2$), então $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_{-1}.

(d) A matriz A é diagonalizável pois a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de A é igual à ordem da matriz A, isto é, $\text{m.g.}(1) + \text{m.g.}(-1) = 3$. Notemos que $\text{m.g.}(1) = 1$ e $\text{m.g.}(-1) = 2$, pois M_{-1} tem uma base com dois elementos e logo $\dim M_{-1} = \text{m.g.}(-1) = 2$.

Uma matriz P tal que $P^{-1}AP = D$, sendo D diagonal, é pois uma matriz construída a partir dos vectores próprios que definem as bases de M_1 e M_{-1}, colocados em colunas pela ordem correspondente à posição dos valores próprios de A, colocados na matriz D. Por exemplo, para $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a matriz P pode ser dada por

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(e) Notemos que $P^{-1}A^{17}P = (P^{-1}AP)P^{-1}A^{16}P = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{17 \text{ vezes}} = D^{17}$. Ora, como D é diagonal $D^{17} = \begin{bmatrix} 1^{17} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{17} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{17} \end{bmatrix} = D$. Logo $P^{-1}A^{17}P = D$.

4. (a) Atendendo às equações das rectas r e s observamos que $u = (1, -1, -1)$ é vector director da recta r e que $v = (-2, 2, 2)$ é vector director da recta s. Como $v = -2\,u$ concluímos que as rectas r e s são paralelas.

Como r é diferente de s, pois o ponto $A = (1, 0, 1)$ pertence a r e não pertence a s (fazendo a substituição $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ na equação $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}$ obtemos uma proposição falsa), concluímos que r e s são estritamente paralelas.

(b) Seja $\mathcal{P}$ o plano que contém as rectas r e s.

Consideremos os pontos A pertencente a r e $B = (1, -1, 1)$ pertencente a s. O vector $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 0)$ é paralelo ao plano $\mathcal{P}$ e não é colinear a u.

Com o ponto A pertencente a $\mathcal{P}$ e os vectores u e $\overrightarrow{AB}$ paralelos a $\mathcal{P}$ podemos obter a equação pedida. Assim, uma equação geral do plano $\mathcal{P}$ obtem-se simplificando

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1) + 0(y-0) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow x + z - 2 = 0.$$

(c) Como r e s são estritamente paralelas a distância entre r e s obtém-se através da distância entre um qualquer ponto (por exemplo B) de s e a recta r. Para tal considere-se o vector u director da recta r e o ponto A pertencente a r.

Tome-se o vector $\overrightarrow{AB}$ e o produto externo $\overrightarrow{AB} \times u = (1, 0, 1)$. Temos $\| \overrightarrow{AB} \times u \| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\|u\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$.

Consequentemente $d(r, s) = d(B, r) = \frac{\| u \times \overrightarrow{AB} \|}{\|u\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

5. (a) AX é vector próprio de A^2 se $AX \neq 0$ e $A^2(AX) = \alpha(AX)$.

Suponhamos que $AX = 0$. Então $A(AX) = A0 = 0$. Mas atendendo à propriedade associativa do produto de matrizes, $A(AX) = A^2X = \alpha X$, porque X é vector próprio de A^2, associado ao valor próprio α. Como $\alpha \neq 0$ e $X \neq 0$ então $\alpha X \neq 0$. Absurdo. Logo, $AX \neq 0$.

Por outro lado,

$$A^2(AX) = A(A^2X) = A(\alpha X) = \alpha(AX).$$

Portanto, AX é vector próprio de A^2.

(b) Por hipótese, a multiplicidade algébrica do valor próprio α é 1, então a multiplicidade geométrica de α também será 1. Assim sendo, qualquer base do subespaço próprio, associado ao valor próprio α, só tem um vector, que é vector próprio de A^2, associado ao valor próprio α. Por outro lado, como X é vector próprio de A^2, associado ao valor próprio α, então (X) é uma base do subespaço próprio, de A^2, associado ao valor próprio α.

Pela alínea anterior, AX é vector próprio de A^2 associado ao valor próprio α. Então AX pertence ao subespaço próprio de A^2 associado ao valor próprio α. Assim sendo, AX escreve-se como combinação linear dos vectores da base (X). Logo, existe um número real β, não nulo porque $AX \neq 0$, tal que $AX = \beta X$. Mas isto significa, porque $X \neq 0$, que X é vector próprio de A, associado ao valor próprio β.