FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Primeiro Teste – 21 de Outubro de 2015

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

[Cotação]

[3,0] **1.** Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \quad \text{e } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

(a) Justifique que é possível efectuar $3B^\top + 2A$ e AB indicando o número de linhas e o número de colunas de cada uma das matrizes resultantes.

(b) Determine os elementos $(AB)_{31}$ e $(3B^\top + 2A)_{14}$.

(c) Atendendo a que a matriz AB é simétrica e que a linha 2 de AB é $(6, 19, 18, -4)$, indique a coluna 2 de AB.

[4,0] **2.** Considere a matriz $B = E_3E_2E_1A$, sendo:

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

(a) Defina matriz elementar.

(b) Determine a matriz B sem efectuar a multiplicação de matrizes.

(c) Indique, justificando, a característica de A.

[2,5] **3.** Determine, se possível, a inversa da matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[5,0] **4.** Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -\alpha & -\alpha & 0 \\ -2 & -4 & \alpha \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Discuta o sistema $AX = B$.

(b) Para $\alpha = 2$ e $\beta = -2$ resolva o sistema $AX = B$ e indique o seu conjunto solução.

[2,0] **5.** Calcule o determinante da matriz $G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[3,5] **6.** Sejam $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, com $p \neq n$, tais que AB é uma matriz invertível. Mostre que:

(a) O sistema homogéneo $BX = 0$ é possível e determinado.

(b) $n > p$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Primeiro Teste – 21 de Outubro de 2015

Uma resolução com notas explicativas

1. (a) Atendendo a que $B \in \mathcal{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$ então $B^\top \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$.

Uma vez que o produto de um escalar α por uma matriz M é uma matriz com o mesmo número de linhas e colunas que M, podemos afirmar que $3B^\top \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$ e $2A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$. Dado que estas duas matrizes têm o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas então é possível efectuar a sua adição sendo a matriz resultante uma matriz com o mesmo número de linhas e de colunas que as suas constituíntes, ou seja, $3B^\top + 2A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$.

A multiplicação das matrizes A e B é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Neste caso, o número de colunas de A é cinco e o número de linhas de B é também cinco. Logo o produto AB existe e terá número de linhas igual ao da matriz A e número de colunas igual ao da matriz B. Tem-se, portanto, que $AB \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

(b) O elemento $(3,1)$ da matriz AB obtém-se através da linha 3 de A e da coluna 1 de B. Assim, tem-se:

$$(AB)_{31} = 2\times 0 + 3\times 1 + 0\times 0 + 2\times 1 + 1\times 1 = 6.$$

Para o cálculo do elemento $(3B^\top + 2A)_{14}$, atenda-se a que

$$(3B^\top + 2A)_{14} = (3B^\top)_{14} + (2A)_{14} = 3(B^\top)_{14} + 2A_{14} = 3B_{41} + 2A_{14} = 3\times 1 + 2\times 1 = 5.$$

Logo $(AB)_{31} = 6$ e $(3B^\top + 2A)_{14} = 5$.

(c) Se AB é simétrica, então $(AB)^\top = AB$, logo cada linha i de AB é igual à coluna i de $(AB)^\top$, que coincide com AB. Podemos então afirmar que a coluna 2 de AB é igual à linha 2 de AB que é $(6, 19, 18, -4)$.

2. (a) Uma matriz $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, diz-se elementar se se obtém da matriz identidade de ordem n, I_n, efectuando uma única transformação elementar (sobre linhas ou colunas).

(b) A matriz B obtém-se a partir da matriz A efectuando transformações elementares sobre linhas, uma vez que

$$A \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} E_1A \xrightarrow[l_3+(1)l_1]{} E_2E_1A \xrightarrow[l_3+(-3)l_2]{} E_3E_2E_1A = B,$$

pois $I_3 \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} E_1$, $I_3 \xrightarrow[l_3+(1)l_1]{} E_2$ e $I_3 \xrightarrow[l_3+(-3)l_2]{} E_3$.
Assim,

$$A \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(1)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-3)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

(c) Como se pode verificar na alínea anterior a matriz A é equivalente por linhas à matriz B, sendo B uma matriz em forma de escada com três linhas não nulas. Deste modo podemos concluir que a característica de A é 3, pois corresponde ao número de linhas não nulas de uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a A.

3. A matriz C é invertível pois tem característica igual à ordem da matriz (note-se que C está em forma de escada e C tem 3 linhas não nulas, donde $r(C) = 3$). Assim, como

$$[C|I_3] \xrightarrow[l_2+(-3)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+5l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

podemos concluir que $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. (a) A matriz ampliada do sistema $AX = B$ é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -\alpha & -\alpha & 0 & -\alpha \\ -2 & -4 & \alpha & \beta \end{array}\right].$$

Assim,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -\alpha & -\alpha & 0 & -\alpha \\ -2 & -4 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+(\alpha)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & 0 \\ -2 & -4 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \beta+2 \end{array}\right] (*).$$

• Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$ então $r(A) = r([A|B]) = 3$. Como $n = 3$ é o número que incógnitas, podemos afirmar que o sistema é possível e determinado ($\forall \beta \in \mathbb{R}$).

• Se $\alpha = 0$ então, de $(*)$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \beta+2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Neste caso vem $r(A) = 2$ e $r([A|B]) = 2$ independentemente de β (ou seja,$\forall\beta$). Como $n = 3$ é o número de incógnitas do sistema então o mesmo é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a $3 - 2 = 1$.

• Se $\alpha = 2$ então, de $(*)$ vem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta+2 \end{array}\right].$$

Neste caso tem-se que $r(A) = 2$, e $r([A|B])$ depende do valor de β.

∘ Se $\beta \neq -2$ então $r([A|B]) = 3$ e, como $r(A) = 2$, então o sitema $AX = B$ é impossível.

∘ Se $\beta = -2$ então $r([A|B]) = 2$ e, como $r(A) = 2$, então o sitema $AX = B$ é possível e indeterminando com grau de indeterminação igual a $3 - 2 = 1$.

(b) Substituíndo $\alpha = 2$ e $\beta = -2$ em $(*)$, tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{(f.e)} \xrightarrow[\frac{1}{2}l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+(-2)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{(f.e.r)}.$$

O sitema $AX = B$ é assim equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

O conjunto solução do sistema é

$$\begin{aligned} CS &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 - z,\ y = z\} \\ &= \{(1 - z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

5. Calcule-se o determinante da matriz G aplicando o teorema de Laplace, à primeira linha da matriz (ou seja, usando a definição). Atendendo a que a primeira linha de G só tem uma posição não nula, obtem-se:

$$\det(G) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2 \times (-1)^{1+2} \times \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right) = (-2) \times (9+2) = -22.$$

6. (a) Suponhamos que o sistema $BX = 0$ é indeterminado (repare que este sistema é homogéneo, portanto uma sua solução é a solução nula, tornando o sistema possível). Então, existe uma solução X_1 do sistema $BX = 0$, não nula. Isto é, $X_1 \neq 0$ e $BX_1 = 0$.

Mas isto implica que

$$(AB)X_1 = A(BX_1) = A0 = 0,$$

ou seja, X_1 é solução não nula do sistema $(AB)X = 0$. Assim sendo, podemos afirmar que o sistema homogéneo $(AB)X = 0$ é indeterminado. Portanto, $r(AB) < p$ (p é o número de incógnitas do sistema $(AB)X = 0$). Mas isto implica que a matriz AB não é invertível. Contradição com o enunciado. Logo, o sistema $BX = 0$ é determinado.

Alternativamente

Considere-se a matriz $(AB)^{-1}A$. Multiplicando, à esquerda, ambos os membros da equação matricial $BX = 0$ por esta matriz, obtemos

$$BX = 0 \Rightarrow (AB)^{-1}ABX = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Concluimos assim que $X = 0$ é a única solução do sistema $BX = 0$. Podemos, portanto, afirmar que $BX = 0$ é possível determinado.

(b) Pela alínea anterior, o sistema $BX = 0$ é determinado, ou seja, $r(B) = p$. Mas por definição de caracteristica, $r(B) \leq n$ (n é o número de linhas de B). Assim sendo temos $r(B) = p \leq n$. Como $p \neq n$, concluímos que $p < n$.

Fim