FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Segundo Teste – 18 de Novembro de 2015

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

[Cotação]

1. Sejam $A, A_1, A_2, B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ quatro matrizes tais que

$$A \xrightarrow[\frac{1}{2}l_1]{} A_1 \xrightarrow[l_2+(-3)l_1]{} A_2 \xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_4]{} B$$

sendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

[2,0] (a) Calcule o determinante da matriz B.

[2,5] (b) Indique o determinante da matriz A relacionando-o com o determinante da matriz B. Justifique convenientemente a resposta.

2. Considere os seguintes subconjuntos do espaço vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$F = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det(A) = 0\}$$

e

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a = 2b + c \ \wedge \ d = -b + c \right\}.$$

[2,0] (a) Justifique que F não é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

[2,5] (b) Apresentando uma sequência geradora, justifique que G é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2,

$$F = \langle(-1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, 1)\rangle \quad \text{e} \quad G = \langle(1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\rangle.$$

[2,0] (a) Determine uma base de $F + G$.

[2,0] (b) Justifique que $\dim(F \cap G) = 1$.

[2,0] (c) Verifique que $(1, 0, 1, 0) \in F \cap G$ e indique, justificando, uma base de $F \cap G$.

[2,0] **4.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear. Justifique que

$$2f(3, 1) + 3f(1, -1) - f(7, -1) + f(-2, 0) = 0.$$

5. Seja E um espaço vectorial de dimensão n. Sejam F e G dois subespaços vectoriais de E tais que $\dim(F) = n - 1$, $\dim(G) = 2$, $G = \langle u, v\rangle$, sendo u e v dois vectores de E. Sabendo que $u \notin F$, mostre que:

[1,5] (a) $\dim(F \cap G) \neq 2$.

[1,5] (b) $\dim(F \cap G) \neq 0$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Segundo Teste – 18 de Novembro de 2015

Uma resolução com notas explicativas

1. (a) Repare-se que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+(-1)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = C.$$

Sendo C uma matriz triangular superior então o seu determinante é dado pelo produto dos elementos da sua diagonal principal. Assim,

$$|C| = 1.2.2.(-1) = -4.$$

Como C é uma matriz obtida a partir de B através de uma transformação elementar sobre linhas de tipo III, então o determinante de B e C são coincidentes (proposição das aulas teóricas). Tem-se que $|B| = |C| = -4$.

(b) Sendo $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sabe-se que:

i. $B_1 \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} B_2 \Rightarrow |B_2| = -|B_1|$;

ii. $B_1 \xrightarrow[\substack{\alpha l_i \\ \alpha\neq 0}]{} B_2 \Rightarrow |B_2| = \alpha|B_1|$;

iii. $B_1 \xrightarrow[li+(\alpha)l_j]{} B_2 \Rightarrow |B_2| = |B_1|$.

Aplicando este resultado à sequência de transformações que conduzem A a B, obtém-se

$$|B| = -|A_2| = -|A_1| = -\frac{1}{2}|A|.$$

Assim,

$$|B| = -\frac{1}{2}|A| \Leftrightarrow |A| = -2|B|,$$

vindo $|A| = -2|B| = -2(-4) = 8$.

2. (a) Se o conjunto F fosse um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ então, para quaisquer matrizes A e B em F, também $A+B$ estaria em F. Tal não acontece para o conjunto F considerado. Vejamos: considerem-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ duas matrizes em F (pois $\det(A) = 0$ e $\det(B) = 0$); verifica-se que $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ tem determinante igual a 1, donde $A+B$ não pertence a F. Concluímos que F não é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Atendendo à descrição de G podemos verificar que:

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{bmatrix} 2b+c & b \\ c & -b+c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

isto é, G é o conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Logo, G é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sendo $\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ uma sua sequência geradora.

3. (a) Sabemos que os geradores da soma de dois subespaços F e G se podem obter pela junção dos geradores de F com os geradores de G. Assim,

$$F+G=\langle(-1,1,-1,1),(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,0,1,0)\rangle.$$

Para que estes vectores sejam uma base de $F+G$ é necessário que sejam linearmente independentes. Disponhamos estes vectores numa matriz e levemo-la à forma de escada, para obtermos uma base deste mesmo subespaço:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2+l_1\\ l_3+l_1\\ l_4+l_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3-\frac{3}{2}l_2\\ l_4-\frac{1}{2}l_2}]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e.).}$$

Como as três linhas não nulas desta matriz são linearmente independentes e continuam a gerar $F+G$, podemos então concluir que

$$((1,1,-1,1),(0,2,0,2),(0,0,0,-1))$$

é uma base de $F+G$. (Note que também $((1,1,-1,1),(1,1,1,1),(1,2,1,1))$ é uma base de $F+G$.)

(b) O Teorema das dimensões diz-nos que $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$. Atendendo a que $\dim(F+G)=3$ (pois na alínea anterior mostrámos que $F+G$ admite uma base com 3 vectores) e que $\dim F=\dim G=2$, obtemos $3=2+2-\dim(F\cap G)$. Concluimos assim que $\dim(F\cap G)=1$.

(c) Verifiquemos em primeiro lugar que $(1,0,1,0)\in F$.

Consideremos a matriz cujas linhas são os vectores geradores de F e o vector $(1,0,1,0)$ e levemo-la à forma de escada.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2+l_1\\ l_3+l_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-\frac{1}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e.).}$$

A linha correspondente ao vector $(1,0,1,0)$ anulou-se, logo, podemos concluir que o vector pertence a F. Por outro lado, dado que $(1,0,1,0)$ é gerador de G então $(1,0,1,0)\in G$.

Como $(1,0,1,0)\in F$ e $(1,0,1,0)\in G$ então $(1,0,1,0)\in F\cap G$.

Atendendo a que $(1,0,1,0)$ é um vector não nulo de $F\cap G$, podemos afirmar que é linearmente independente. Uma vez que $\dim(F\cap G)=1$, então $((1,0,1,0))$ é uma base de $F\cap G$.

4. Como a aplicação f é linear, então $af(x,y)=f(a(x,y))$, para quaisquer $a\in\mathbb{R}$ e $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Assim,

$$2f(3,1)+3f(1,-1)-f(7,-1)+f(-2,0)=f(2(3,1))+f(3(1,-1))+f((-1)(7,-1))+f(-2,0),$$

ou seja

$$2f(3,1)+3f(1,-1)-f(7,-1)+f(-2,0)=f(6,2)+f(3,-3)+f(-7,1)+f(-2,0).$$

Como a aplicação f é linear, então $f(x,y)+f(z,w)=f((x,y)+(z,w))$, para quaisquer $(x,y),\ (z,w)\in\mathbb{R}^2$. Assim,

$$\begin{aligned} &2f(3,1)+3f(1,-1)-f(7,-1)+f(-2,0)=f(6,2)+f(3,-3)+f(-7,1)+f(-2,0)\\ =&f((6,2)+(3,-3))+f((-7,1)+(-2,0))=f(9,-1)+f(-9,1)=f((9,-1)+(-9,1))\\ =&f(0,0). \end{aligned}$$

Como $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é aplicação linear, transforma o zero de $\mathbb{R}^2$, no zero de $\mathbb{R}$. Portanto,

$$2f(3,1) + 3f(1,-1) - f(7,-1) + f(-2,0) = f(0,0) = 0.$$

5. (a) Suponhamos que $\dim(F \cap G) = 2$. Porque $\dim G = 2$ e $F \cap G$ é subespaço de G, então $F \cap G = G$. Por outro lado, $G = F \cap G \subseteq F$. Então, $G \subseteq F$. Como $u \in G$, podemos concluir que $u \in F$. Mas isto contraria a hipótese. Logo, $\dim(F \cap G) \neq 2$.

(b) Suponhamos que $\dim(F \cap G) = 0$. Pelo teorema das dimensões,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = n - 1 + 2 + 0 = n + 1.$$

Como F e G são subespaços de E, então $F + G$ é subespaço de E. Portanto,

$$n + 1 = \dim(F + G) \leq \dim E = n,$$

donde $n + 1 \leq n$, o que é impossível. Assim sendo, $\dim(F \cap G) \neq 0$.

Fim