FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Terceiro Teste – 11 de Dezembro de 2015

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

[Cotação]

1. Considere a base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((-1,1,1),(1,1,1),(1,1,0))$ e a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a,b,c) = (-a,b,b),$$

para todo o $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Seja $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$.

[2,5] (a) Determine a matriz A.

[2,0] (b) Calcule $\dim \operatorname{Im} f$ e indique, justificando, se f é sobrejectiva.

[2,0] (c) Verifique que $(0,0,1) \in \operatorname{Nuc} f$ e determine uma base do $\operatorname{Nuc} f$.

[2,5] (d) Determine uma matriz $Q \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3}) = QA$.

2. Considere $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Sabendo que 3 é um valor próprio de C e que

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

é uma base do subespaço próprio de C associado ao valor próprio 3, mostre que:

[2,5] (a) 1 é valor próprio de C e determine uma base do subespaço próprio de C associado a este valor próprio.

[2,5] (b) Justifique que C é diagonalizável e indique uma matriz P tal que $P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Considere o referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ e os pontos

$$A = (2,1,-1), \quad B = (3,2,0), \quad C = (2,2,0).$$

Determine:

[1,5] (a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$;

[1,5] (b) a área do triângulo $[ABC]$;

4. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$. Mostre que:

[1,5] (a) Todo o valor próprio de A pertence ao conjunto $\{1,2\}$.

[1,5] (b) Se a matriz A^2 é diagonalizável, então a matriz A também é diagonalizável.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Terceiro Teste – 11 de Dezembro de 2015

Uma resolução com notas explicativas

1. (a) Atendendo a que:

$$f(-1,1,1) = (1,1,1) = 0(-1,1,1) + 1(1,1,1) + 0(1,1,0)$$
$$f(1,1,1) = (-1,1,1) = 1(-1,1,1) + 0(1,1,1) + 0(1,1,0)$$
$$f(1,1,0) = (-1,1,1) = 1(-1,1,0) + 0(1,1,1) + 0(1,1,0)$$

Podemos obter a matriz pretendida dispondo por colunas os coeficientes anteriormente obtidos. Assim teremos: $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Como $\dim \operatorname{Im} f = \mathrm{r}(A)$ basta determinar a característica de A para sabermos a dimensão do subespaço imagem.

Visto que, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f.e.), podemos concluir que $\mathrm{r}(A) = 2$.

Logo $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Como uma aplicação linear é sobrejectiva se, e só se, a dimensão do espaço imagem for igual à dimensão do espaço de chegada podemos concluir que, neste caso, f não é sobrejectiva pois a dimensão do espaço de chegada é $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \neq \dim \operatorname{Im} f = 2$.

(c) Um vector pertence ao núcleo de uma aplicação linear se, e só se, a sua imagem for o zero do espaço de chegada. Ora, como $f(0,0,1) = (0,0,0)$ podemos afirmar que $(0,0,1) \in \operatorname{Nuc} f$.

Pelo Teorema das dimensões sabemos que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f \Leftrightarrow 3 = \dim \operatorname{Nuc} f + 2 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Nuc} f = 1.$$

Como $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$, $(0,0,1) \in \operatorname{Nuc} f$ e $(0,0,1) \neq (0,0,0)$, podemos concluir que $((0,0,1))$ é uma base do núcleo de f.

(d) Esquematicamente temos:

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f", "\boldsymbol{A}"'] \arrow[rr, bend right, "f", "\boldsymbol{QA}"'] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}", "\boldsymbol{Q}"'] & \underset{b.c._{\mathbb{R}^3}}{\mathbb{R}^3}
\end{tikzcd}.$$

Uma vez que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \circ f$ podemos afirmar que $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3}) = QA$ onde Q é a matriz de mudança de base $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3})$.

Atendendo a que

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(-1,1,1) = (-1,1,1) = -1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$
$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(1,1,1) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$
$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(1,1,0) = (1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

Podemos então afirmar que a matriz de mudança de base $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = Q$

2. (a) 1 é valor próprio de A se, e só se, $|A - 1I_3| = 0$.

Como $|A - 1I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (porque é o determinante de uma matriz com duas linhas iguais), podemos concluir que 1 é valor próprio da matriz A.

O subespaço próprio associado ao valor prório 1 é

$$M_1 = \{X \in M_{3\times 1} : AX = 1.X\} = \{X \in M_{3\times 1} : (A - 1I_3)X = 0\}.$$

Resolvendo o sistema $(A - 1I_3)X = 0$, vem

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+(-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

logo,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}, \ y \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in M_{3\times 1} : x = -y,\ z = 0,\ y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Como a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é de M_1 e é constituída por matrizes l.i (só uma matriz diferente de $0_{3\times 1}$), então $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_1.

(b) Sabe-se das aulas teóricas que uma matriz $C \in M_{3\times 3}$ é diagonalizável se a soma das multiplicidades geométricas de todos os seus valores próprios for igual a 3 (ordem de C).

Ora, $\alpha = 3$ e $\alpha = 1$ são os únicos vectores próprios de C. Por hipótese tem-se que $\alpha = 3$ é um valor próprio cujo subespaço próprio M_3 admite $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ como base e, pela alínea (a), tem-se que M_1 admite $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ como base.

Assim, $\text{mg}(3) = \dim M_3 = 2$ e $\text{mg}(1) = \dim M_1 = 1$, tendo-se $\text{mg}(3) + \text{mg}(1) = 3$, o que permite afirmar que C é diagonalizável. Uma matriz P tal que

$$P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

é pois uma matriz construída a partir dos vectores próprios que definem as bases de M_3 e M_1, colocados em colunas pela ordem correspondente à posição dos valores próprios de C, colocados na matriz $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Por exemplo a matriz P pode então ser dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Sabendo que se a base (e_1, e_2, e_3) é ortonormada e directa, temos

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$$

e

$$\overrightarrow{AC} = (0,1,1) = e_2 + e_3.$$

Consequentemente,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\text{mnemónica} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e_3$$

$$= -e_2 + e_3 = (0, -1, 1).$$

(b) Como a sequência $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ é linearmente independente então os pontos A, B, C definem um paralelogramo cuja área é

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \| - e_2 + e_3\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

A área do triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C é dada por

$$\frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. (a) Seja λ um valor próprio de A. Isto significa que existe uma matriz coluna X (vector próprio de A) tal que $X \neq 0$ e

$$AX = \lambda X.$$

Por hipótese, $A^2 - 3A + 2I_n = 0$ então $(A^2 - 3A + 2I_n)X = 0X = 0$. Mas

$$A^2X = AAX = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda\lambda X = \lambda^2 X.$$

Donde,

$$0 = (A^2 - 3A + 2I_n)X = A^2X - 3AX + 2I_nX = \lambda^2 X - 3\lambda X + 3X = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)X.$$

Portanto, $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)X = 0$. Como $X \neq 0$, então

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Porque $0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, concluimos que $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

(b) Se A^2 é diagonalizável, então existe uma matriz $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, invertível tal que

$$P^{-1}A^2P = D,$$

em que D é uma matriz diagonal. Por hipótese, $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, ou seja,

$$A = \frac{1}{3}(A^2 + 2I_n).$$

Assim sendo,

$$P^{-1}AP = P^{-1}\left(\frac{1}{3}(A^2 + 2I_n)\right)P = \frac{1}{3}(P^{-1}A^2P + 2P^{-1}I_nP) = \frac{1}{3}(D + 2I_n).$$

Porque D é matriz diagonal e I_n é matriz diagonal, então $\frac{1}{3}(D + 2I_n)$ é uma matriz diagonal. Mas isto significa que A é diagonalizável.