

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

1. Considere a sequência de vectores de $\mathbb{R}^3$, $S = (u, v, w)$, com $u = (-1, 0, -k)$, $v = (k, 1, 1)$ e $w = (2, 1, k+1)$, com $k \in \mathbb{R}$.

[1,0] (a) Determine para que valores de k a sequência S é linearmente independente.

[1,0] (b) Seja $F = \langle u, v, w \rangle$. Para $k = 1$ indique uma base de F .

[1,0] (c) Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -k \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k+1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Atendendo a que as linhas da matriz A correspondem aos vectores u, v, w justifique que, para $k = -1$, o sistema $AX = B$ é um Sistema de Cramer, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

[1,0] (d) Seja $k = -1$. Utilizando a Regra de Cramer resolva o sistema $AX = B$, com $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Mude de Folha

2. Considere a base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$, e a base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_2 = ((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$, e a aplicação linear $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, a+b),$$

para todo o $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Seja $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

[1,5] (a) Determine a matriz A .

[1,0] (b) Determine uma base do $\text{Nuc } f$ e indique, justificando, se f é injectiva.

[1,0] (c) A partir da dimensão de $\text{Im } f$ indique, justificando, se f é sobrejectiva.

[1,0] (d) Considere a base $\mathcal{B}'_2 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz de mudança de base $Q \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_2) = QA$.

Mude de Folha

Continua no verso desta folha

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- [1,0] (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
- [1,0] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios da matriz A .
- [1,0] (c) Verifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.
- [1,0] (d) Justifique que a sequência $\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de vectores próprios de A .
- [1,0] (e) Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $\mathcal{M}(f; b.c._{\mathbb{R}^3}, b.c._{\mathbb{R}^3}) = A$. Considere

$$\mathcal{B} = ((-4, 0, 2), (2, -4, -2), (0, -3, 0))$$

uma base de $\mathbb{R}^3$. Justifique, sem efectuar cálculos, que $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é diagonal.

Mude de Folha

4. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os vectores $u = (1, 2, -1)$ e $v = (-1, 1, 1)$.

- [1,0] (a) Usando o produto externo, determine um vector w de norma 3 que seja perpendicular a u e v .
- [1,0] (b) Indique a área do paralelogramo definido pelos vectores u e v .
- [1,0] (c) Determine $\sin \angle(u, v)$.

Mude de Folha

5. Sejam $A \in M_{n \times n}$ e $B \in M_{n \times n}$ invertível. Mostre que:

- [1,0] (a) Se $\alpha \in \mathbb{K}$ é valor próprio de A então α é valor próprio de $A^\top$.
- [1,0] (b) Se $\beta \in \mathbb{K}$ é valor próprio de B então $\beta \neq 0$ e β^{-1} é valor próprio de B^{-1} .
- [1,5] (c) As matrizes BAB^{-1} e $B^{-1}AB$ têm os mesmos valores próprios.

Fim

- [1,0] 1. (a) De modo a determinar os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a sequência de vectores S é linearmente independente dispomos os vectores u , v e w numa matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -k \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k+1 \end{bmatrix}$$

e vejamos para que valores de k temos a característica de A igual a 3.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -k \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+2l_1]{l_2+kl_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k^2+1 \\ 0 & 1 & -k+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3+(-1)l_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k^2+1 \\ 0 & 0 & k^2-k \end{bmatrix} (f.e.).$$

Sabendo que a característica da A é dada pelo número de linhas não nulas de uma sua forma de escada, então característica de A é 3 se e só se

$$k^2 - k \neq 0 \Leftrightarrow k(k-1) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge k \neq 1,$$

ou seja, se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Assim a sequência de vectores S é linearmente independente, se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

- [1,0] (b) Como já vimos na alínea (a)

$$A \xrightarrow{(linhas)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k^2+1 \\ 0 & 0 & k^2-k \end{bmatrix}$$

donde, para $k = 1$, vem

$$A \xrightarrow{(linhas)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim uma base de F seria, por exemplo, a sequência de vectores $((-1, 0, -1), (0, 1, 0))$ pois as linhas não nulas de uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a A geram também o subespaço F e são linearmente independentes. A sequência $((-1, 0, -1), (1, 1, 1))$ é também uma base de F pois é constituída por 2 vectores de F linearmente independentes (são não nulos e nenhum é múltiplo escalar do outro) e já vimos que $\dim F = 2$.

- [1,0] (c) Na alínea (a) já verificámos que para $k = -1$ a característica de A é igual a 3 e, portanto, A é uma matriz invertível pois é do tipo 3×3 e tem característica 3. Então o sistema $AX = B$ é de Cramer para $k = -1$, independentemente da matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, pois a matriz simples do sistema é quadrada e invertível.

- [1,0] (d) Para $k = -1$ a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz A é invertível o sistema $AX = B$ é de Cramer e a sua solução (única) pode então ser obtida recorrendo-se à regra de Cramer que garante que é da forma (x, y, z) , onde

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Logo,

$$x = \frac{|A|}{|A|} = 1, \quad y = \frac{0}{|A|} = 0, \quad z = \frac{0}{|A|} = 0,$$

e $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ é a única solução do sistema pois matrizes com duas colunas iguais têm determinante nulo.

[1,5] 2. (a) Atendendo a que:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= (2, 1, 2+1) = (2, 1, 3) = \mathbf{3} \cdot (0, 0, 1) + \mathbf{2} \cdot (1, 0, 0) + \mathbf{1} \cdot (0, 1, 0) \\ f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) &= (1, 1, 1+1) = (1, 1, 2) = \mathbf{2} \cdot (0, 0, 1) + \mathbf{1} \cdot (1, 0, 0) + \mathbf{1} \cdot (0, 1, 0) \\ f\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= (-1, 1, -1+1) = (-1, 1, 0) = \mathbf{0} \cdot (0, 0, 1) + (-\mathbf{1}) \cdot (1, 0, 0) + \mathbf{1} \cdot (0, 1, 0) \\ f\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= (2, 0, 2+0) = (2, 0, 2) = \mathbf{2} \cdot (0, 0, 1) + \mathbf{2} \cdot (1, 0, 0) + \mathbf{0} \cdot (0, 1, 0) \end{aligned}$$

podemos obter a matriz pretendida dispondo por colunas os coeficientes anteriormente obtidos.

Assim teremos:

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1,0] (b) Sabemos que

$$\text{Nuc } f = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (0, 0, 0) \right\}.$$

Ora

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (a, b, a+b) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge b = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

A sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente pois é constituída por dois vectores não nulos de $\text{Nuc } f$ em que nenhum deles é múltiplo escalar do outro e é geradora, logo é uma base do $\text{Nuc } f$.

Para f ser injectiva teríamos de ter $\text{Nuc } f = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Como tal não acontece podemos concluir que f não é injectiva.

[1,0] (c) Pelo Teorema da dimensão sabemos que

$$\dim(\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f \Leftrightarrow 4 = 2 + \dim \text{Im } f \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = 2.$$

Como uma aplicação linear é sobrejectiva se, e só se, a dimensão do espaço imagem for igual à dimensão do espaço de chegada podemos concluir que, neste caso, f não é sobrejectiva pois a dimensão do espaço de chegada é $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \neq \dim \operatorname{Im} f$.

[1,0] (d) Esquematicamente temos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) & \xrightarrow[f]{A} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow[\mathbf{Q}]{\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}_1 & & \mathcal{B}_2 & & \mathcal{B}'_2 \end{array}$$

$\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3} \circ f$
 QA

Uma vez que $f = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3} \circ f$ podemos afirmar que $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_2) = QA$ onde Q é a matriz de mudança de base $\mathcal{M}(\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2)$.

Atendendo a que

$$\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = \mathbf{0} \cdot (1, 1, 1) + \mathbf{0} \cdot (0, 1, 1) + \mathbf{1} \cdot (0, 0, 1)$$

$$\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = \mathbf{1} \cdot (1, 1, 1) + (-\mathbf{1}) \cdot (0, 1, 1) + \mathbf{0} \cdot (0, 0, 1)$$

$$\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = \mathbf{0} \cdot (1, 1, 1) + \mathbf{1} \cdot (0, 1, 1) + (-\mathbf{1}) \cdot (0, 0, 1)$$

podemos afirmar que a matriz de mudança de base $\mathcal{M}(\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = Q$.

[1,0] 3. (a) Os valores próprios de A são as soluções da equação característica $\det(A - xI_3) = 0$ na indeterminada x . Ora

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 2 & 2-x & 4 \\ 1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{Lapl.} \\ C_2}}{=} (2-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} \\ &= -(x-2)[(1-x)(4-x) - (-2)] = -(x-2)(x^2 - 5x + 6) = -(x-2)^2(x-3) \end{aligned}$$

pelo que 2 e 3 são os valores próprios de A .

O valor próprio 2 tem multiplicidade algébrica 2 e o valor próprio 3 tem multiplicidade algébrica 1.

[1,0] (b) O subespaço próprio associado ao valor próprio 2 é

$$M_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1} : AX = 2X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1} : (A + (-2)I_3)X = 0_{3 \times 1}\}.$$

Resolvendo o sistema $(A + (-2)I_3)X = 0_{3 \times 1}$, com $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, vem

$$[A + (-2)I_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 + (-2)l_1 \\ l_3 + (-1)l_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(f.e.r.)}$$

ou seja,

$$x + 2z = 0 \Leftrightarrow x = -2z.$$

Assim,

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1} : x = -2z \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Como a sequência $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é geradora de M_2 e é linearmente independente (note-se que $\text{r} \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2$), então $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_2 .

Por outro lado, o subespaço próprio associado ao valor próprio 3 é

$$M_3 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1} : AX = 3X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1} : (A + (-3)I_3)X = 0_{3 \times 1}\}.$$

Resolvendo o sistema $(A + (-3)I_3)X = 0_{3 \times 1}$, com $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, vem

$$\begin{aligned} [A + (-3)I_3|0] &= \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-\frac{1}{2})l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{l_2 + (-2)l_1, l_3 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(f.e.r.)} \end{aligned}$$

ou seja,

$$x + z = 0 \wedge y - 2z = 0 \Leftrightarrow x = -z \wedge y = 2z.$$

Assim,

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1} : x = -z \wedge y = 2z \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Como a sequência $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é geradora de M_3 e é linearmente independente (note-se que é composta por um único vector não nulo), então $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_3 .

- [1,0] (c) A matriz A é diagonalizável pois a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de A é igual à ordem da matriz A , isto é, $\text{m.g.}(2) + \text{m.g.}(3) = 3$. Notemos que $\text{m.g.}(2) = 2$ e $\text{m.g.}(3) = 1$, pois M_2 tem uma base com dois elementos e logo $\dim M_2 = \text{m.g.}(2) = 2$ e M_3 tem uma base com um elemento e, portanto, $\dim M_3 = \text{m.g.}(3) = 1$.

Uma matriz P tal que $P^{-1}AP = D$, sendo D diagonal, é pois uma matriz construída a partir dos vectores próprios que definem as bases de M_2 e M_3 , colocados em colunas pela ordem correspondente à posição dos valores próprios de A , colocados na matriz

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo a matriz P pode então ser dada por

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- [1,0] (d) Como $2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $-3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ então a sequência de vectores de $\mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, $\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, é também uma base de M_2 . Por outro lado, como $-2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ então a sequência de vectores de $\mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$, é também uma base de M_3 . Assim a sequência de vectores de $\mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, $\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, é linearmente independente e, portanto, é uma base de $\mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, ou seja, é uma base de vectores próprios de A .

- [1,0] (e) Vimos na alínea (d) que $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A associados ao valor próprio 2 e $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 3. Então

$$A \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} f(-4, 0, 2) &= 2(-4, 0, 2) = \mathbf{2}(-4, 0, 2) + \mathbf{0}(2, -4, -2) + \mathbf{0}(0, -3, 0) \\ f(2, -4, -2) &= 3(2, -4, -2) = \mathbf{0}(-4, 0, 2) + \mathbf{3}(2, -4, -2) + \mathbf{0}(0, -3, 0) \\ f(0, -3, 0) &= 2(0, -3, 0) = \mathbf{0}(-4, 0, 2) + \mathbf{0}(2, -4, -2) + \mathbf{2}(0, -3, 0) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- [1,0] 4. (a) Determinemos $u \times v$.

Utilizando como mnemónica o desenvolvimento do “determinante” sem significado matemático

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

pelo Teorema de Laplace aplicado à linha 1, obtemos

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} e_3 \\ &= 3e_1 + 0e_2 + 3e_3. \end{aligned}$$

Determinemos agora um vector unitário perpendicular a u e a v e um vector perpendicular a u e a v com norma 3.

Por definição de produto externo, como u e v são linearmente independentes, $u \times v$ é um vector perpendicular a u e a v .

Tem-se

$$\|u \times v\| = \sqrt{(u \times v) \cdot (u \times v)} = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Como para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e qualquer vector z não nulo, de $\mathbb{R}^3$, o vector αz tem a direcção de z e $\|\alpha z\| = |\alpha| \|z\|$, basta considerar um vector

$$\alpha(u \times v)$$

com

$$|\alpha| = \frac{1}{3\sqrt{2}},$$

ou equivalentemente, $\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ ou $\alpha = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Logo, o vector

$$w = \frac{1}{3\sqrt{2}}(u \times v) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3e_1 + 0e_2 + 3e_3)$$

é, ainda, perpendicular a u e a v e tem norma 1 tal como o vector

$$w' = -\frac{1}{3\sqrt{2}}(u \times v) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}(3e_1 + 0e_2 + 3e_3).$$

Se pretendermos um vector perpendicular a u e a v com norma 3, basta considerar o vector

$$z = 3w = \frac{1}{\sqrt{2}}(3e_1 + 0e_2 + 3e_3)$$

ou

$$z' = 3w' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(3e_1 + 0e_2 + 3e_3).$$

- [1,0] (b) A área do paralelogramo definido pelos vectores u e v é dada pela norma do produto externo de u por v . Ora já vimos na alínea (a) que essa norma tem o valor $3\sqrt{2}$ então a área do paralelogramo definido pelos vectores u e v tem o valor absoluto $3\sqrt{2}$.

- [1,0] (c) Como $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \angle(u, v)$, e u e v são vectores não nulos,

$$\sin \angle(u, v) = \frac{\|u \times v\|}{\|u\| \|v\|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = 1.$$

- [1,0] 5. (a) Tendo em conta que o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta e, as propriedades da transposição de matrizes, vem, para qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$|A - \alpha I_n| = |(A - \alpha I_n)^T| = |A^T - (\alpha I_n)^T| = |A^T - \alpha I_n^T| = |A^T - \alpha I_n|.$$

Ora $\alpha \in \mathbb{K}$ é valor próprio de A se, e só se, $|A - \alpha I_n| = 0$. Como já provámos que $|A - \alpha I_n| = |A^T - \alpha I_n|$ então temos também $|A^T - \alpha I_n| = 0$ e, portanto, α também é valor próprio de A^T .

- [1,0] (b) Ora $\beta \in \mathbb{K}$ é valor próprio de B se, e só se, $|B - \beta I_n| = 0$. Como, por hipótese, a matriz B é invertível não podemos ter $\beta = 0$ pois nesse caso viria $|B| = |B - 0I_n| = 0$ o que estaria em contradição com a hipótese de B ser invertível.

Assim $\beta \neq 0$ e, portanto, existe $\beta^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\beta\beta^{-1} = \beta^{-1}\beta = 1$.

Por definição de valor próprio, se $\beta \in \mathbb{K}$ é valor próprio de B então existe $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ tal que $BX = \beta X$. Por outro lado, como B é invertível existe $B^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$. Então

$$\begin{aligned} BX = \beta X &\Rightarrow B^{-1}(BX) = B^{-1}(\beta X) \Rightarrow (B^{-1}B)X = \beta(B^{-1}X) \Rightarrow I_n X = \beta(B^{-1}X) \\ &\Rightarrow X = \beta(B^{-1}X) \Rightarrow \beta^{-1}X = \beta^{-1}(\beta(B^{-1}X)) \Rightarrow \beta^{-1}X = (\beta^{-1}\beta)(B^{-1}X) \\ &\Rightarrow \beta^{-1}X = 1(B^{-1}X) \Rightarrow \beta^{-1}X = B^{-1}X \end{aligned}$$

e, portanto, β^{-1} é valor próprio de B^{-1} .

- [1,5] (c) Como

$$\begin{aligned} |BAB^{-1} - xI_n| &= |BAB^{-1} - xBI_nB^{-1}| = |B(A - xI_n)B^{-1}| \\ &= |B||A - xI_n||B^{-1}| = |B^{-1}||A - xI_n||B| = |B^{-1}(A - xI_n)B| \\ &= |B^{-1}AB - xB^{-1}I_nB| = |B^{-1}AB - xI_n| \end{aligned}$$

as matrizes BAB^{-1} e $B^{-1}AB$ têm o mesmo polinómio característico e, portanto, têm os mesmos valores próprios.