FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Primeiro Teste – 21 de Outubro de 2016

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

[Cotação]

1. Considere as matrizes

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

Apresentando todos os cálculos efetuados determine:

[1,0] (a) A matriz X tal que $2X + (A^{-1})^\top = 3(X - B^{-1})$.

[1,5] (b) A matriz $B^{-1}C$ e a matriz Y que verifica $AY = B^{-1}C$.

[1,5] (c) O elemento $(2,3)$ da matriz $(AB)^{-1}$.

2. Considere a matriz $A = E_1E_2E_3$, sendo:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[2,5] (a) Justifique que E_1, E_2 e E_3 são matrizes elementares e indique o tipo e a transformação elementar que permite obter cada uma dessas matrizes a partir da matriz identidade.

[1,0] (b) Justifique que A é invertível.

[3,0] (c) Atendendo a que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine A^{-1}.

3. Para cada $k \in \mathbb{R}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, considere o sistema $(S_{k,t})$ de três equações lineares nas incógnitas x, y, z sobre $\mathbb{R}$:

$$(S_{k,t}) : \begin{cases} x + 2y + z &= -2 \\ -y + 2z &= -3 \\ -2x - 4y + kz &= t \end{cases}.$$

[0,5] (a) Determine a matriz ampliada do sistema.

[3,0] (b) Discuta o sistema $(S_{k,t})$ em função dos parâmetros k e t.

[2,0] (c) Para $k = -2$ e $t = 4$ indique o conjunto das soluções do sistema.

[1,0] **4.** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Determine $A(2|3)$ e $\hat{a}_{23}$.

5. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$.

[1,5] (a) Mostre que se $m = n$ e A é uma matriz invertível então $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(B)$.

[1,5] (b) Seja A' uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a A. Mostre que para qualquer $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e para qualquer $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ se tem $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A'B) \leq \mathrm{r}(A)$.

Fim

1. (a) Atendendo às propriedades da adição de matrizes e do produto de um escalar por uma matriz, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} & 2X + (A^{-1})^\top = 3(X - B^{-1}) \\ \Leftrightarrow\ & 2X + (A^{-1})^\top = 3X - 3B^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & -3X + 2X = -3B^{-1} - (A^{-1})^\top \\ \Leftrightarrow\ & (-3+2)X = -(3B^{-1} + (A^{-1})^\top) \\ \Leftrightarrow\ & -X = -(3B^{-1} + (A^{-1})^\top) \\ \Leftrightarrow\ & X = 3B^{-1} + (A^{-1})^\top. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} X &= 3\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}^\top \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Ora

$$B^{-1}C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Como, pela propriedade associativa da multiplicação de matrizes, pela definição de matriz invertível e pelas propriedades de I_n, se tem

$$\begin{aligned} AY = B^{-1}C \ &\Leftrightarrow\ A^{-1}(AY) = A^{-1}(B^{-1}C) \\ &\Leftrightarrow\ (A^{-1}A)Y = A^{-1}(B^{-1}C) \\ &\Leftrightarrow\ I_nY = A^{-1}(B^{-1}C) \\ &\Leftrightarrow\ Y = A^{-1}(B^{-1}C) \end{aligned}$$

vem

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

(c) Pela teoria das matrizes invertíveis

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Assim, pela definição de produto de matrizes,

$$\begin{aligned} ((AB)^{-1})_{23} &= (B^{-1}A^{-1})_{23} = \text{"linha 2 de } B^{-1} \times \text{ coluna 3 de } A^{-1}\text{"} \\ &= (B^{-1})_{21}(A^{-1})_{13} + (B^{-1})_{22}(A^{-1})_{23} + (B^{-1})_{23}(A^{-1})_{33} \\ &= 1\cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1)\cdot 4 \\ &= 1 + 2 - 4 \\ &= -1. \end{aligned}$$

2. (a) Uma matriz $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, diz-se elementar se se obtém da matriz identidade de ordem n, I_n, efectuando uma única transformação elementar (sobre linhas ou colunas). Como

$$I_3 \xrightarrow[l_2+(-2)l_1]{} E_1,\ I_3 \xrightarrow[l_3+2l_2]{} E_2 \ \text{ e } \ I_3 \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} E_3,$$

então E_1 e E_2 são matrizes elementares do tipo III e E_3 é uma matriz elementar do tipo I.

(b) Toda a matriz elementar é invertível e A é um produto de matrizes elementares, logo A é invertível.

(c) Pela teoria das matrizes invertíveis, como $A = E_1E_2E_3$ então $A^{-1} = E_3^{-1}E_2^{-1}E_1^{-1}$. Ora a inversa de uma matriz elementar é também uma matriz elementar e, portanto,

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{ pois } I_3 \xrightarrow[l_2+(-2)l_1]{} E_1 \xrightarrow[l_2+2l_1]{} I_3,$$

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \ \text{ pois } I_3 \xrightarrow[l_3+2l_2]{} E_1 \xrightarrow[l_3+(-2)l_2]{} I_3 \ \text{ e}$$

$$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 \ \text{ pois } I_3 \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} E_1 \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} I_3.$$

Assim

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Processo alternativo:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1+\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3+(-2)\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\ell_3+(-4)\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1+2\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}].$$

3. (a) A matriz ampliada do sistema é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & k & t \end{array}\right].$$

(b) Ora

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & k & t \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & k+2 & t-4 \end{array}\right] = [A'|B'].$$

Observamos que a matriz $[A'|B']$ está em forma de escada independentemente dos valores que k e t possam assumir em $\mathbb{R}$. Como

$$k+2=0 \ \Leftrightarrow \ k=-2$$

e

$$t-4=0 \ \Leftrightarrow \ t=4$$

então:

- se $k \neq -2$ então, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos $r(A) = r([A|B]) = 3 =$ nº de incógnitas e, portanto, o sistema é possível determinado;
- se $k = -2$ e $t \neq 4$, temos $\mathrm{r}(A) = 2 < 3 = \mathrm{r}([A|B])$, e o sistema é impossível;
- se $k = -2$ e $t = 4$, então $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B]) = 2 < 3 =$ nº de incógnitas e, portanto, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1 (pois $n - \mathrm{r}(A) = 3 - 2 = 1$).

(c) Para $k = -2$ e $t = 4$ temos

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+2l_1]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A'|B'] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A''|B''] \xrightarrow[l_1+(-2)l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A'''|B''']$$

e a matriz $[A'''|B''']$ está em forma de escada reduzida. O sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z sobre $\mathbb{R}$ correspondente à matriz ampliada $[A'''|B''']$ é

$$\begin{cases} x &= -8 - 5z \\ y &= 3 + 2z \\ 0 &= 0 \end{cases} .$$

Logo o conjunto de soluções do sistema é

$$\{(-8 - 5z, 3 + 2z, z) : \ z \in \mathbb{R}\}.$$

4. Por definição, $A(2|3)$ é a matriz quadrada de ordem 2 que se obtém a partir da matriz A retirando a linha 2 e a coluna 3, isto é,

$$A(2|3) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\hat{a}_{23} = (-1)^{2+3} \det A(2|3) = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 6 - 2 \cdot (-1)) = -2.$$

5. (a) Como A é invertível podemos escrever $A = E_s \cdots E_1$ sendo $E_1, \ldots, E_s$ matrizes elementares, com $s \in \mathbb{N}$. Logo $AB = E_s \cdots E_1 B$ e, portanto, existem $B_0, B_1, \ldots, B_s \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$B = B_0 \xrightarrow[T_1]{} B_1 \xrightarrow[T_2]{} \cdots \xrightarrow[T_{s-1}]{} B_{s-1} \xrightarrow[T_s]{} B_s = E_s \cdots E_1 B = AB$$

sendo $T_1, \ldots, T_s$ as transformações elementares sobre linhas correspondentes, respetivamente, às matrizes elementares $E_1, \ldots, E_s$. Assim AB é equivalente por linhas a B e, portanto, $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(B)$.

(b) Como A' é equivalente por linhas a A existem $E_1, \ldots, E_s$, com $s \in \mathbb{N}$, matrizes elementares tais que $A' = E_s \cdots E_1 A$. Tomando $P = E_s \cdots E_1$ temos que P é invertível, pois é produto de matrizes elementares e, pela associatividade do produto de matrizes,

$$A'B = (PA)B = P(AB).$$

Logo, pelo que provámos na alínea (a), $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A'B)$.

Se $\mathrm{r}(A) = m$ então, como o número de linhas de AB é m, temos

$$\mathrm{r}(AB) \leq m = \mathrm{r}(A).$$

Suponhamos que $\mathrm{r}(A) < m$. Então A' tem p linhas nulas, com $p \in \{1, \ldots, m\}$. Daqui concluímos que $A'B$ tem também, pelo menos, p linhas nulas. Como $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A'B)$, qualquer forma de escada obtida a partir de AB terá, pelo menos, p linhas nulas e, também neste caso, temos

$$\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A).$$