FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Segundo Teste – 23 de Novembro de 2016

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

[Cotação]

1. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$

$$F=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a=-b+c \ \wedge\ d=0\right\},\quad G=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a=d+c \ \wedge\ b=0\right\}.$$

[2,0] (a) Determine uma base e a dimensão para o subespaço F e para o subespaço G.

[0,5] (b) Indique uma sequência geradora do subespaço $F+G$.

[1,5] (c) Justifique que $\dim(F+G)=3$ e determine $\dim(F\cap G)$.

[2,0] (d) Indique, justificando, uma base de $F\cap G$.

2. Considere a matriz $A_k\in\mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$, com $k\in\mathbb{R}$:

$$A_k=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & k\\ 0 & k & -k & k\\ -1 & 0 & 2 & k+2\end{bmatrix}.$$

[2,5] (a) Utilizando determinantes, indique o conjunto dos valores de k para os quais a matriz A_k é invertível.

[3,0] (b) Para $k=3$ determine, apresentando todos os cálculos efectuados:

(i) $\det A_k$ (ii) $(\mathrm{Adj}A_k)_{34}$ (iii) $\left(A_k^{-1}\right)_{34}$, sem determinar A_k^{-1}.

3. Considere a base (u_1,u_2) de $\mathbb{R}^2$.

[1,5] (a) Seja (v_1,v_2,v_3) uma sequência de vectores de $\mathbb{R}^2$. Justifique que esta sequência não é linearmente independente.

[1,5] (b) Justifique que a sequência de $\mathbb{R}^2$ $(2u_1,u_1+3u_2)$ é também uma base de $\mathbb{R}^2$.

4. Seja $\mathcal{B}=((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que: $f(1,0,0)=(0,1)$, $f(1,1,0)=(2,1)$ e $f(1,1,1)=(-1,0)$.

[1,0] (a) Escreva o vector $(4,3,2)$ como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$.

[1,5] (b) Atendendo a que f é uma aplicação linear determine $f(4,3,2)$.

5. Seja $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, com $m,n\in\mathbb{N}$. Sejam $B\in\mathcal{M}_{m\times1}(\mathbb{R})$ uma matriz não nula

$$\mathcal{F}=\{X\in\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}) :\ AX=0_{m\times1}\}\ \text{ e }\ \mathcal{S}=\{X\in\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}) :\ AX=B\}.$$

[1,5] (a) Mostre que $\mathcal{F}$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$.

[1,5] (b) Assumindo que $X_0\in\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$ é uma solução do sistema $AX=B$, mostre que

$$\mathcal{S}=\{X_0+X :\ X\in\mathcal{F}\}.$$

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Segundo Teste – 23 de Novembro de 2016

Uma resolução com notas explicativas

[2,0] **1.** (a) Atendendo à descrição de F podemos verificar que:

$$\begin{aligned} F &= \left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 :\ a=-b+c\ \wedge\ d=0\right\} \\ &= \{(-b+c,b,c,0):\ b,c\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(-b,b,0,0)+(c,0,c,0):\ b,c\in\mathbb{R}\} \\ &= \{b(-1,1,0,0)+c(1,0,1,0):\ b,c\in\mathbb{R}\} \\ &= \langle(-1,1,0,0),(1,0,1,0)\rangle\,. \end{aligned}$$

Logo $((-1,1,0,0),(1,0,1,0))$ é uma sequência geradora do subespaço F e é linearmente independente pois é composta apenas por dois vectores tais que nenhum deles é múltiplo escalar do outro. Então $((-1,1,0,0),(1,0,1,0))$ é uma base de F e, portanto, $\dim F=2$.

Pela forma como G está descrito temos que:

$$\begin{aligned} G &= \left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 :\ a=d+c\ \wedge\ b=0\right\} \\ &= \{(d+c,0,c,d):\ b,c\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(c,0,c,0)+(d,0,0,d):\ c,d\in\mathbb{R}\} \\ &= \{c(1,0,1,0)+d(1,0,0,1):\ b,c\in\mathbb{R}\} \\ &= \langle(1,0,1,0),(1,0,0,1)\rangle\,. \end{aligned}$$

Logo $((1,0,1,0),(1,0,0,1))$ é uma sequência geradora do subespaço G e é linearmente independente pois é composta apenas por dois vectores tais que nenhum deles é múltiplo escalar do outro. Então $((1,0,1,0),(1,0,0,1))$ é uma base de G e, portanto, $\dim G=2$.

[0,5] (b) Sabemos que os geradores da soma de dois subespaços F e G se podem obter pela junção dos geradores de F com os geradores de G. Vimos na alínea anterior que $((-1,1,0,0),(1,0,1,0))$ é uma sequência geradora do subespaço F e $((1,0,1,0),(1,0,0,1))$ é uma sequência geradora do subespaço G logo

$$((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1))$$

é uma sequência geradora do subespaço $F+G$. Como o vector $(1,0,1,0)$ está repetido a sequência

$$((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1))$$

é também uma sequência geradora do subespaço $F+G$.

[1,5] (c) Vimos, na alínea anterior, que

$$((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1))$$

é uma sequência geradora do subespaço $F+G$. Para que esta sequência geradora seja uma base de $F+G$ é necessário que seja linearmente independente. Disponhamos estes vectores numa matriz A e levemo-la à forma de escada:

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[l_3+l_1]{l_2+l_1}\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{}\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\quad \text{(f.e.)}.$$

Como a característica de A é 3 então a sequência $((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1))$ é linearmente independente e, portanto, é uma base de $F+G$.

Note que a sequência $((-1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,-1,1))$ também é uma base de $F+G$ pois é linearmente independente, por ser constituída pelas três linhas não nulas de uma matriz em forma de escada, e também gera $F+G$.

Assim $\dim(F+G)=3$.

O Teorema das dimensões diz-nos que $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$. Atendendo a que $\dim(F+G)=3$ e que $\dim F=\dim G=2$, obtemos $3=2+2-\dim(F\cap G)$. Concluimos assim que $\dim(F\cap G)=1$.

[2,0] (d) Como $(1,0,1,0)\in F$ e $(1,0,1,0)\in G$, pois é um dos geradores de F e também é um dos geradores de G, então $(1,0,1,0)\in F\cap G$.

Atendendo a que $(1,0,1,0)$ é um vector não nulo de $F\cap G$, podemos afirmar que é linearmente independente. Uma vez que $\dim(F\cap G)=1$, então $((1,0,1,0))$ é uma base de $F\cap G$.

[2,5] **2.** (a) Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & k \\ 0 & k & -k & k \\ -1 & 0 & 2 & k+2 \end{vmatrix} \underset{\substack{l_3+kl_2\\ l_4+l_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & k+k^2 \\ 0 & 0 & 1 & k+2 \end{vmatrix} \underset{l_3\longleftrightarrow l_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & k+k^2 \end{vmatrix}$$

e o determinante de uma matriz triangular superior é dado pelo produto dos elementos da sua diagonal principal vem,

$$\det A_k = -(1\cdot(-1)\cdot 1\cdot(k+k^2)) = k+k^2 = k\cdot(1+k).$$

Ora A_k é invertível se, e só se, $\det A_k\neq 0$. Como

$$k\cdot(1+k)\neq 0 \;\Leftrightarrow\; k\neq 0\wedge k\neq -1$$

então o conjunto dos valores de k para os quais a matriz A_k é invertível é $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.

[3,0] (b) Para $k=3$ vem:

(i) $\det A_k = k\cdot(1+k) = 3\cdot(1+3) = 3\cdot 4 = 12$;

(ii) $(\text{Adj } A_k)_{34} = \left(\widehat{A_k}^{\top}\right)_{34} = \left(\widehat{A_k}\right)_{43} = (-1)^{4+3}\cdot\det A_k(4|3) = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & k & k \end{vmatrix}$

$= -1\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & k \\ k & k \end{vmatrix} = -1\cdot(-1\cdot k - k\cdot k) = k+k^2 = 3+3^2 = 3+9 = 12$;

(iii) $\left(A_k^{-1}\right)_{34} = \dfrac{1}{\det A_k}\cdot(\text{Adj } A_k)_{34} = \dfrac{1}{12}\cdot 12 = 1.$

[1,5] **3.** (a) A dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2 e, portanto, qualquer sequência linearmente independente tem, no máximo, 2 vectores. Logo a sequência (v_1,v_2,v_3) não pode ser linearmente independente pois é composta por 3 vectores.

[1,5] (b) Em relação à base (u_1,u_2), a sequência das coordenadas de:

$$\begin{array}{rcl} 2u_1 & \text{é} & (2,0), \\ u_1+3u_2 & \text{é} & (1,3). \end{array}$$

Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 + (-\frac{1}{2})l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

com

$$\mathrm{r}(A) = 2$$

e, portanto, a sequência $((2,0),(1,3))$ é linearmente independente. Assim a sequência $(2u_1, u_1 + 3u_2)$ também é linearmente independente e, como estamos num espaço vectorial de dimensão 2, é uma base de $\mathbb{R}^2$.

`Resolução alternativa`:

Tendo em conta que as sequências de vectores resultantes de transformações de tipo elementar geram o mesmo subespaço gerado pela sequência incial temos:

$$\mathbb{R}^2 = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, 3u_2 \rangle = \langle u_1, u_1 + 3u_2 \rangle = \langle 2u_1, u_1 + 3u_2 \rangle.$$

Assim a sequência $(2u_1, u_1 + 3u_2)$ gera $\mathbb{R}^2$ e como é composta por dois vectores, e estamos num espaço de dimensão dois, é também uma base de $\mathbb{R}^2$.

[1,0] **4.** (a) Determinemos a sequência das coordenadas de $(4,3,2)$ na base $\mathcal{B}$. Ora

$$\begin{aligned}(4,3,2) &= \alpha_1 \cdot (1,0,0) + \alpha_2 \cdot (1,1,0) + \alpha_3 \cdot (1,1,1) \\ &= (\alpha_1, 0, 0) + (\alpha_2, \alpha_2, 0) + (\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3).\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}.$$

Tem-se, pois, um sistema de equações lineares nas incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, cuja solução única é $(1,1,2)$. Assim a sequência das coordenadas do vector $(4,3,2)$ na base $\mathcal{B}$ é $(1,1,2)$, isto é,

$$(4,3,2) = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (1,1,0) + 2 \cdot (1,1,1).$$

[1,5] (b) Como a aplicação f é linear, então $f((x,y,z) + (a,b,c)) = f(x,y,z) + f(a,b,c)$, para quaisquer $(x,y,z),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, e $f(\beta \cdot (x,y,z)) = \beta \cdot f(x,y,z)$, para quaisquer $\beta \in \mathbb{R}$ e $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Assim,

$$\begin{aligned} f(4,3,2) &= f(1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (1,1,0) + 2 \cdot (1,1,1)) \\ &= f(1 \cdot (1,0,0)) + f(1 \cdot (1,1,0)) + f(2 \cdot (1,1,1)) \\ &= 1 \cdot f(1,0,0) + 1 \cdot f(1,1,0) + 2 \cdot f(1,1,1) \\ &= 1 \cdot (0,1) + 1 \cdot (2,1) + 2 \cdot (-1,0) \\ &= (0,1) + (2,1) + \cdot(-2,0) \\ &= (0,2). \end{aligned}$$

5. (a) **1-** Pela forma como $\mathcal{F}$ está definido temos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

2- Pelas propriedades do produto de matrizes temos $A \cdot 0_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$ e, portanto, $0_{n\times 1} \in \mathcal{F}$.

3- Sejam $X_1, X_2 \in \mathcal{F}$. Vejamos que $X_1 + X_2 \in \mathcal{F}$.

Como $X_1, X_2 \in \mathcal{F}$ então $AX_1 = 0_{m\times 1}$ e $AX_2 = 0_{m\times 1}$. Logo, pelas propriedades da adição e multiplicação de matrizes, vem

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0_{m\times 1} + 0_{m\times 1} = 0_{m\times 1}$$

e, portanto, $X_1 + X_2 \in \mathcal{F}$.

4- Sejam $X \in \mathcal{F}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Vejamos que $\beta X \in \mathcal{F}$.

Como $X \in \mathcal{F}$ então $AX = 0_{m\times 1}$. Logo, pelas propriedades do produto de um escalar por uma matriz, vem

$$A(\beta X) = \beta(AX) = \beta 0_{m\times 1} = 0_{m\times 1}$$

e, portanto, $\beta X \in \mathcal{F}$.

Assim, por **1**, **2**, **3** e **4**, $\mathcal{F}$ é subespaço de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

(b) Como $X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ é uma solução do sistema $AX = B$ então $AX_0 = B$.

Seja $X \in \mathcal{F}$ e vejamos que $X_0 + X \in \mathcal{S}$.

Como $X \in \mathcal{F}$ então $AX = 0_{m\times 1}$. Então, pelas propriedades da adição e multiplicação de matrizes,

$$A(X_0 + X) = AX_0 + AX = B + 0_{m\times 1} = B.$$

Logo $X_0 + X \in \mathcal{S}$ e, portanto, como a escolha de $X \in \mathcal{F}$ foi arbitrária,

$$\{X_0 + X : \ X \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Seja agora $X \in \mathcal{S}$ arbitrário. Vejamos que existe $X' \in \mathcal{F}$ tal que $X = X_0 + X'$.

Como $X \in \mathcal{S}$ então $AX = B$. Consideremos $X' = X - X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e vejamos que $X' \in \mathcal{F}$. Ora, pelas propriedades da adição e multiplicação de matrizes,

$$AX' = A(X - X_0) = AX - AX_0 = B - B = 0_{m\times 1}$$

e, portanto, $X' \in \mathcal{F}$. Mas

$$X_0 + X' = X_0 + (X - X_0) = [X_0 + (-X_0)] + X = 0_{n\times 1} + X = X$$

donde podemos concluir que

$$S \subseteq \{X_0 + X : \ X \in \mathcal{F}\}.$$

Por $\{X_0 + X : \ X \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{S}$ e $S \subseteq \{X_0 + X : \ X \in \mathcal{F}\}$ vem

$$S = \{X_0 + X : \ X \in \mathcal{F}\}.$$