FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Terceiro Teste – 16 de Dezembro de 2016

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

[Cotação]

1. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(a,b,c) = (2a+b, b+c)$, para todo o $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Sejam $\mathcal{B} = ((1,0,2),(2,1,0),(4,2,-1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((0,-1),(1,1))$ uma base de $\mathbb{R}^2$.

[2,5] (a) Determine $A = \mathcal{M}(f; b.c._{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}')$.

[2,0] (b) Determine uma base do $\operatorname{Nuc} f$.

[1,5] (c) Justifique, que f é sobrejectiva.

[1,5] (d) Determine uma matriz $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $AP = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Mude de Folha

2. Considere $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[2,0] (a) Determine o polinómio característico de C, $p_C(x)$, e a partir deste determine os valores próprios da matriz C.

[1,0] (b) Atendendo a que $\operatorname{mg}(1) = 2$, justifique que a matriz C é diagonalizável.

[2,0] (c) Justifique que $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base do subespaço próprio de C associado ao valor próprio 1, M_1, e que $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de C associado ao valor próprio 5.

[2,0] (d) Indique uma matriz $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ invertível tal que $P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Mude de Folha

3. Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$, com $O = (0,0,0)$, e os pontos $A = (1,k,0)$, $B = (1,1,0)$ e $C = (1,2,1)$, com $k \in \mathbb{R}$.

[1,5] (a) Determine o conjunto dos valores de k para os quais o volume do paralelepípedo de arestas $[OA]$, $[OB]$ e $[OC]$ seja igual a 3.

[1,0] (b) Para $k = 0$ determine o ângulo $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Mude de Folha

4. Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que:

[1,0] (a) Se 0 é valor próprio de AB então 0 é valor próprio de BA.

[2,0] (b) Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ é valor próprio de AB então α é valor próprio de BA.
(*Sugestão:* Use a definição de valor próprio.)

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Terceiro Teste – 16 de Dezembro de 2016

Uma resolução com notas explicativas

[2,5] **1.** (a) Tem-se

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (2\cdot 1+0,0+0)=(2,0)=\mathbf{2}\cdot(0,-1)+\mathbf{2}\cdot(1,1);\\ f(0,1,0) &= (2\cdot 0+1,1+0)=(1,1)=\mathbf{0}\cdot(0,-1)+\mathbf{1}\cdot(1,1);\\ f(0,0,1) &= (2\cdot 0+0,0+1)=(0,1)=(-\mathbf{1})\cdot(0,-1)+\mathbf{0}\cdot(1,1) \end{aligned}$$

pelo que

$$A=\mathcal{M}(f;b.c._{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

[2,0] (b) Tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Nuc} f &= \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ f(a,b,c)=(0,0)\}\\ &= \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ (2a+b,b+c)=(0,0)\}\\ &= \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ 2a+b=0\ \wedge\ b+c=0\}\\ &= \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ a=-\frac{1}{2}b\ \wedge\ c=-b\right\}\\ &= \left\{\left(-\frac{1}{2}b,b,-b\right):\ b\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{b\left(-\frac{1}{2},1,-1\right):\ b\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\langle\left(-\frac{1}{2},1,-1\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

Como $\left(-\frac{1}{2},1,-1\right)\neq(0,0,0)$ a sequência $\left(\left(-\frac{1}{2},1,-1\right)\right)$ é linearmente independente e, como é geradora de $\operatorname{Nuc} f$, então é uma base de $\operatorname{Nuc} f$.

[1,5] (c) Pelo Teorema da Dimensão

$$\dim\mathbb{R}^3=\dim\operatorname{Nuc} f+\dim\operatorname{Im} f.$$

Ora $\dim\mathbb{R}^3=3$ e, pelo que vimos na alínea (b), $\dim\operatorname{Nuc} f=1$. Logo $\dim\operatorname{Im} f=2$. Mas $\operatorname{Im} f$ é um subespaço do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ que tem dimensão 2. Então $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$ e, portanto, f é sobrejectiva.

[1,5] (d) Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}"] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\circ f\circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}=f"'] & \underset{b.c._{\mathbb{R}^3}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f"] & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}"] & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}.$$

Ora

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') &= \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\circ f\circ\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B},\mathcal{B}')\\ &= \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2};\mathcal{B}',\mathcal{B}')\cdot\mathcal{M}(f;b.c._{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}')\cdot\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B},b.c._{\mathbb{R}^3}). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2};\mathcal{B}',\mathcal{B}')=I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ pois

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(0,-1) &= (0,-1)=\mathbf{1}\cdot(0,-1)+\mathbf{0}\cdot(1,1)\\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(1,1) &= (1,1)=\mathbf{0}\cdot(0,-1)+\mathbf{1}\cdot(1,1) \end{aligned}$$

então
$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = A \cdot \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3}).$$

Assim $P = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3})$ e, portanto, P é invertível pois é uma matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $b.c._{\mathbb{R}^3}$.

Ora

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(1,0,2) &= (1,0,2) = \mathbf{1}\cdot(1,0,0) + \mathbf{0}\cdot(0,1,0) + \mathbf{2}\cdot(0,0,1);\\
\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(2,1,0) &= (2,1,0) = \mathbf{2}\cdot(1,0,0) + \mathbf{1}\cdot(0,1,0) + \mathbf{0}\cdot(0,0,1);\\
\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(4,2,-1) &= (4,2,-1) = \mathbf{4}\cdot(1,0,0) + \mathbf{2}\cdot(0,1,0) + (-\mathbf{1})\cdot(0,0,1).
\end{aligned}$$

Então
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

[2,0] **2.** (a) Temos que

$$\begin{aligned}
p_C(x) = |C - xI_3| &= \begin{vmatrix} 3-x & 4 & 0 \\ 1 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \underset{l_3}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (1-x)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix}\\
&= (1-x)[(3-x)^2 - 4] = (1-x)[(3-x)-2][(3-x)+2]\\
&= (1-x)(1-x)(5-x) = (1-x)^2(5-x).
\end{aligned}$$

Como os valores próprios de C são as raízes de $p_C(x)$, os valores próprios de C são 1 e 5 com $\mathrm{ma}(1) = 2$ e $\mathrm{ma}(5) = 1$.

[1,0] (b) Sabemos que
$$1 \le \mathrm{mg}(5) \le \mathrm{ma}(5) = 1$$
e, portanto, $\mathrm{mg}(5) = 1$. Então
$$\mathrm{mg}(1) + \mathrm{mg}(5) = 2 + 1 = 3$$
donde podemos concluir que C é diagonalizável.

[2,0] (c) Como
$$C\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+4 \\ -2+3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de C associados ao valor próprio 1.

A sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente pois nenhuma das duas matrizes coluna é múltiplo escalar da outra.

Visto que $\dim M_1 = \mathrm{mg}(1) = 2$ então a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ é uma base de M_1 pois é composta por 2 vectores linearmente independentes de M_1.

Por outro lado, como

$$C\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+4\\2+3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\\0\end{bmatrix}=5\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

então $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ é vector próprio de C associado ao valor próprio 5.

[2,0] (d) A sequência, de vectores próprios de C, $\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente pois $\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ é uma sequência linearmente independente de vectores próprios de C associados ao valor próprio 1 e $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ é um vector próprio de C associado ao valor próprio 5.

Pelo que vimos na teoria $P\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$P=\begin{bmatrix}0&2&-2\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

é uma matriz invertível diagonalizante de C tal que

$$P^{-1}CP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Mude de Folha

[1,5] **3.** (a) Sabemos que o volume desse paralelepípedo é igual a

$$\left|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\mid\overrightarrow{OC}\right|.$$

Determinemos

$$(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\mid\overrightarrow{OC}.$$

Tem-se

$$\overrightarrow{OA}=A-O=(1,k,0),\qquad \overrightarrow{OB}=B-O=(1,1,0),\qquad \overrightarrow{OC}=C-O=(1,2,1)$$

e

$$(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\mid\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}1&k&0\\1&1&0\\1&2&1\end{vmatrix}\underset{c_3}{\overset{\text{Lapl.}}{=}}1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&k\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(1\cdot1-k\cdot1)=1-k.$$

Assim, são equivalentes as afirmações:

$$\left|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\mid\overrightarrow{OC}\right|=3$$

$$|1-k|=3$$

$$\begin{array}{rcl} 1-k=3 & \vee & 1-k=-3 \\ k=-2 & \vee & k=4. \end{array}$$

Logo, o conjunto dos valores de k para os quais o volume do paralelepípedo é 3 é

$$\{-2, 4\}.$$

[1,0] (b) Determinemos, para $k=0$, o ângulo formado pelos vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Neste caso tem-se

$$\overrightarrow{OA} = (1,0,0) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{OB} = (1,1,0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &= \arccos \frac{\overrightarrow{OA} \mid \overrightarrow{OB}}{\|u\|\|v\|} \\ &= \arccos \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\,\sqrt{1^2+1^2+0^2}} \\ &= \arccos \frac{1}{\sqrt{1}\,\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Mude de Folha

[1,0] **4.** (a) Se 0 é valor próprio de AB então

$$|AB| = |AB - 0I_n| = 0.$$

Como $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ então

$$|BA - 0I_n| = |BA| = |B|\cdot|A| = |A|\cdot|B| = |AB| = 0$$

donde concluímos que 0 também é valor próprio de BA.

[2,0] (b) Se $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ é valor próprio de AB então existe $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})\setminus\{0_{n\times 1}\}$ tal que

$$(AB)X = \alpha X.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por B vem

$$B[(AB)X] = B(\alpha X)$$

donde, pelas propriedades da multiplicação de matrizes e da multiplicação de um escalar por uma matriz, vem

$$(BA)(BX) = \alpha(BX).$$

Temos que $BX \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})\setminus\{0_{n\times 1}\}$ pois se $BX = 0_{n\times 1}$ então teríamos, pelas propriedades da multiplicação de matrizes,

$$\alpha X = (AB)X = A(BX) = A0_{n\times 1} = 0_{n\times 1},$$

o que é absurdo visto que $\alpha \neq 0$ e $X \neq 0_{n\times 1}$.

Assim α é valor próprio de BA e BX é vector próprio de BA associado ao valor próprio α.