

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinala-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de duas horas e meia de prova.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ obtida a partir de $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ efectuando as seguintes transformações elementares sobre linhas:

$$A \xrightarrow{l_2 + (-1)l_1} A_1 \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} A_2 \xrightarrow{(-2)l_2} B.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A As matrizes A e B têm a mesma forma de escada reduzida.

☐ B Se B é a matriz identidade I_3 , então $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ C Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ então $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ D Para quaisquer matrizes A e B nas condições do enunciado,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$$

2. Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, w , sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x - y + w = 1 \\ (a - 1)y + z = a \\ bz + bw = b - a \\ bz + aw = 3b - 2a \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $a \neq 1$ e $b = 1$ o sistema é possível determinado.
☐ B Se $a = 0$ e $b = 0$ o sistema é possível, indeterminado com grau de indeterminação 1.
☐ C Se $a \neq 0$ e $b = 0$, o sistema é impossível.
☐ D Se $a = 0$ e $b = 1$ o conjunto de soluções do sistema é $\{(6, 3, 3, -2)\}$.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, com $\det A = k > 0$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\det A^{-1} = \frac{1}{k}$.
☐ B $\det (A^{-1}A^T A) = k$.
☐ C $\begin{vmatrix} -a & -kb & -c \\ d & ke & f \\ -g & -kh & -i \end{vmatrix} = -k^2$.
☐ D Se $A \xrightarrow{l_3 + (-2)l_2} B \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} C$, então $\det C = -k$.

4. Considere E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sejam (e_1, e_2, e_3, e_4) uma base de E e $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ uma sequência de vectores de E .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A sequência $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ é uma sequência linearmente dependente de E .
☐ B A dimensão de E é 4 e, portanto, $\dim(\langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle) \leq 4$.
☐ C Se a sequência $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ é geradora de E então é uma base de E .
☐ D A sequência $(e_1, e_2, e_3, e_4, 0_E)$ é uma sequência geradora de E mas não é uma base de E .

5. Considere os seguintes subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$: $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - z = 0 \wedge y + w = 0\}$ e $G = \langle (1, 0, 2, 0), (0, -1, 1, 0) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\dim F = 2$.
☐ B $(1, 0, 2, 0) \in F \cap G$.
☐ C $F + G = \langle (1, 0, 2, 0), (0, -1, 1, 0), (0, 1, 0, -1) \rangle$.
☐ D $\dim F \cap G = 2$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.
[Cotação]

6. Considere as matrizes $D = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, onde $k \in \mathbb{R}$, e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

- [0,5] (a) Discuta a característica de D em função do valor de k .
[1,0] (b) Para $k = 0$, verifique que D é invertível e, apresentando os cálculos efectuados, determine D^{-1} .
[1,0] (c) Para $k = 1$, determine o conjunto de soluções do sistema $DX = 0_{3 \times 1}$.

Mude de Folha

7. Sejam b.c. $_{\mathbb{R}^3}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$.
Considere $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ a aplicação linear tal que

$$A = \mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- [0,5] (a) Determine $f(1, 1, -1)$ e $f(0, 1, 0)$.
[1,0] (b) Utilizando a alínea (a), indique se f é injectiva e conclua se é sobrejectiva.
[1,0] (c) Seja $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Utilizando uma matriz de mudança de base, determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Mude de Folha

8. Sejam $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- [1,0] (a) Verifique que 1 é o único valor próprio de B e determine uma base do subespaço próprio de B associado ao valor próprio 1.
[0,5] (b) Averigüe se B é diagonalizável.
[1,0] (c) Indique os valores próprios de C e, sem efectuar quaisquer outros cálculos, justifique que C é diagonalizável mas não é invertível.

Mude de Folha

9. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$, considere os vectores u e v de coordenadas $(1, 0, 1)$ e $(0, -1, 1)$, respectivamente.

- [0,5] (a) Usando o produto externo, determine um vector w de norma 3 que seja perpendicular a u e v .
[0,5] (b) Indique a área do paralelogramo definido pelos vectores u e v .
[1,0] (c) Determine a distância entre o ponto A de coordenadas $(0, 1, 2)$ no referencial dado e o plano $\mathcal{P}$ definido pelos vectores u e v e que passa no ponto O .

Mude de Folha

10. Sejam $G, H \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Mostre que:

- [1,5] (a) Se $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ é um vector próprio de HG associado ao valor próprio α e $\alpha \neq 0$ então GX é um vector próprio de GH associado ao valor próprio α .
[1,5] (b) Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor próprio de HG então λ é um valor próprio de GH .

Fim

1. B
2. B
3. C
4. C
5. D
6. (a) Para podermos discutir a característica da matriz D teremos de levar a matriz à forma de escada efectuando transformações elementares nas suas linhas. Assim, teremos

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2k \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.}).$$

Dado que a característica da matriz D é o número de linhas não nulas da matriz em forma de escada equivalente por linhas a D , concluímos que

- Se $2k - 2 \neq 0 \iff k \neq 1$, então $r(D) = 3$;
 - Se $2k - 2 = 0 \iff k = 1$, então $r(D) = 2$.
- (b) Como foi visto na alínea (a), para $k = 0 \neq 1$, $r(D) = 3$ o que coincide com a ordem da matriz, logo D é invertível. Para determinar a inversa da matriz D ampliemos a matriz D com a matriz identidade e levemos a matriz obtida à forma de escada reduzida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_1 - 2l_3 \\ l_2 - l_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.r.})$$

Desta forma, concluímos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- (c) Para $k = 1$, consideremos a matriz ampliada do sistema $DX = 0$ e levemo-la à forma de escada reduzida para obtermos as soluções do sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 - l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.r.})$$

Assim, o conjunto de soluções do sistema é dado por

$$C.S. = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = -c \wedge b = -c\} = \{(-c, -c, c) : c \in \mathbb{R}\}.$$

7. (a) Para determinarmos a imagem de cada um destes vectores, usando a matriz da aplicação linear temos de determinar a sequência das coordenadas de cada um deles na base do espaço de partida.

Uma vez que a base considerada é a base canónica a sequência das coordenadas de cada um destes vectores coincide com o próprio vector.

Como,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sabemos que as coordenadas de $f(1, 1, -1)$ e de $f(0, 1, 0)$ na base $\mathcal{B}'$, são, respectivamente, $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

Deste modo, temos

$$\begin{aligned} f(1, 1, -1) &= 0(1) + 0(1+x) + 0(1+x+x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \\ f(0, 1, 0) &= 1(1) + 1(1+x) + 1(1+x+x^2) = 3 + 2x + x^2. \end{aligned}$$

- (b) Uma vez que, pela alínea (a), existe um vector não nulo cuja imagem é $0_{\mathbb{R}_2[x]}$, então, $\text{Nuc}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e, portanto, f não é injectiva. Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$ então f também não é sobrejectiva.
- (c) Consideremos o seguinte esquema

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_2[x] \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{P} & \text{b.c. } \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A} & \mathcal{B}' \end{array} \quad .$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{AP} \quad f$

Tomando $P = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, \text{b.c. } \mathbb{R}^3)$ obtem-se $PA = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Ora

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^3}(1, 1, 1) &= (1, 1, 1) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) \\ id_{\mathbb{R}^3}(1, 1, 0) &= (1, 1, 0) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \\ id_{\mathbb{R}^3}(1, 0, 0) &= (1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. (a) A matriz B é uma matriz triangular superior, pelo que os seus valores próprios são exactamente os valores que encontram-se na diagonal principal. Assim, a matriz B tem um único valor próprio que é o valor 1.

O subespaço próprio de B associado ao valor próprio 1 é o seguinte:

$$M_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (B - 1I_3)X = 0_{3 \times 1}\}.$$

Ora

$$B - 1I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 + (-1)l_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f.e.r.).$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : b = 0 \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

donde se conclui que a sequência $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é geradora de M_1 . Como o vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é não nulo, então $\mathcal{S}$ é linearmente independente. Portanto, $\mathcal{S}$ é uma base de M_1 .

- (b) Na alínea anterior verificou-se que a matriz B tem um único valor próprio, o 1, e que a multiplicidade geométrica de 1 é 1, pois $m.g.(1) = \dim M_1 = 1$. (Note que a dimensão de um espaço vectorial corresponde ao número de vectores de uma sua base.)

Uma matriz é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios for igual à ordem da matriz. No caso em questão, a matriz B tem ordem 3 e a multiplicidade geométrica do único valor próprio de B é 1. Logo, B não é diagonalizável.

- (c) Uma vez que a matriz C é triangular superior, os valores próprios de C são os valores que se encontram na diagonal principal de C . Assim, C tem valores próprios 0, -3 e 2.

A matriz C é diagonalizável porque é uma matriz de ordem 3 que tem igual número de valores próprios todos distintos.

A matriz C tem uma coluna de zeros, donde não é invertível. (Também seria possível justificar que C não é invertível pelo facto de C ter 0 como valor próprio. Sabe-se que uma matriz é invertível se, e só se, 0 não é um dos seus valores próprios.)

9. (a) O produto externo de u por v , $u \times v$, é um vector que, se for não nulo, é perpendicular a u e a v . Ora

$$u \times v = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} e_3 = e_1 - e_2 - e_3.$$

O comprimento de $u \times v$ é $\|u \times v\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$. Logo, o vector

$$w = \frac{3}{\sqrt{3}} u \times v = \sqrt{3} e_1 - \sqrt{3} e_2 - \sqrt{3} e_3$$

está nas condições pedidas. (Note que também o vector $-w$ satisfaz as mesmas condições.)

- (b) A área do paralelogramo definido pelos vectores u e v é dada por $\|u \times v\|$. Assim, atendendo aos cálculos efectuados na alínea anterior, concluímos que a área é $\sqrt{3}$.

- (c) A distância do ponto A ao plano $\mathcal{P}$ é dada por:

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{OA}|_{u \times v}}{\|u \times v\|}.$$

Temos que $\vec{OA}$ tem coordenadas $(0, 1, 2)$ e $\vec{OA}|_{u \times v} = 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 2 \times (-1) = -3$. Assim,

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

10. (a) Seja $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{C})$. Suponhamos que X é um vector próprio de HG associado ao valor próprio α tal que $\alpha \neq 0$. Por definição, temos $(HG)X = \alpha X$. Donde se tira que

$$GHGX = G\alpha X = \alpha GX.$$

Assim se conclui que $(GH)(GX) = \alpha(GX)$. Mostremos que $GX \neq 0_{n \times 1}$. Suponhamos, com vista à obtenção de uma contradição, que $GX = 0_{n \times 1}$. Como $H(GX) = \alpha X$ então temos $H0_{n \times 1} = \alpha X$. Logo $\alpha X = 0_{n \times 1}$. Tendo presente que, por hipótese, $\alpha \neq 0$ então temos

$$X = 1X = (\alpha^{-1}\alpha)X = \alpha^{-1}(\alpha X) = \alpha^{-1}0_{n \times 1} = 0_{n \times 1};$$

o que contradiz a hipótese de que X é um vector próprio de HG .

- (b) Suponhamos que λ é um valor próprio de HG .

Se $\lambda \neq 0$ então, pela alínea (a), λ é um valor próprio de GH .

Suponhamos que $\lambda = 0$. Nesta conformidade, a matriz HG não é invertível e por conseguinte

$$0 = \det(HG) = \det H \det G = \det G \det H = \det(GH).$$

Assim se conclui que, neste contexto, GH não é invertível. Logo 0 é um valor próprio de GH . Como, neste caso, $\lambda = 0$ então conclui-se que λ é um valor próprio de GH .

Do exposto resulta que, em qualquer dos casos, λ é um valor próprio de GH .