FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Primeiro Teste – 08 de Novembro de 2017

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e meia de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,8 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,6 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}), \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $(AB)_{21} = 0$ e $(BA)_{21} = -3$.

B $(A^2)_{11} = -1$.

C $(CC^\top)_{31} = (CC^\top)_{13} = 0$.

D $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

Continua no verso desta folha

2. Considere a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $(\operatorname{adj} A)_{22} = 4$.
- B $\det A = 2$.
- C $\left(A^{-1}\right)_{22} = 2$.
- D $\det\left(3A^{\top}\right) = 6$.

3. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ obtida a partir de $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ efetuando as seguintes transformações elementares sobre linhas:

$$A \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} A_1 \xrightarrow[(-1)l_3]{} A_2 \xrightarrow[l_1+(-2)l_2]{} B.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A As matrizes A e B têm a mesma forma de escada reduzida.
- B Se B é a matriz identidade I_3, então $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- C Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ então $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.
- D $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$, para quaisquer matrizes A e B nas condições do enunciado.

4. Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (b-1)x + y - z = 1 \\ (a^2-1)y + z = 2 \\ (a-b)z = b+2 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A Se $a \neq b$, $b \neq 1$ e $a = -1$ o sistema é possível determinado.
- B Se $a = -2$ e $b = -2$ então o sistema é possível, indeterminado com grau de indeterminação 1.
- C Para $a = 0$ e $b = 2$, $(3, -4, -2)$ é a única solução do sistema.
- D Se $a = 1$ e $b = 1$ o conjunto de soluções do sistema é o conjunto vazio.

5. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $F = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b = a^2\right\}$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
- B $G = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a + d = 0\right\}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
- C $H = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : ad - cb \neq 0\right\}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
- D Em qualquer espaço vetorial real E, se $u, v \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha u - \beta v \in E$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Primeiro Teste – 08 de Novembro de 2017

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere as matrizes A e $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com B equivalente por linhas a A e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1.5] (a) Usando o Teorema de Laplace, calcule o determinante da matriz A.

[1.0] (b) Indique, justificando, a forma de escada reduzida de B.

[1.0] (c) Justifique que a matriz A é invertível e indique $\det(A^{-1})$.

Mude de Folha

7. Considere a matriz $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, e para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as matrizes

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 - 1 \\ 0 & \alpha + 1 & 2 \\ \beta & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \text{ e } B_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha + 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Indique, justificando, a expressão do determinante da matriz $C_{\alpha,\beta}$ e conclua para que valores de α e de β a matriz $C_{\alpha,\beta}$ é invertível.

[1.0] (b) Indique, justificando, para que valores de α e β o sistema $C_{\alpha,\beta}X = B_\alpha$ é um sistema de Cramer.

[1.5] (c) Seja (a, b, c) a solução do sistema $C_{\alpha,\beta}X = B_\alpha$, para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Indique o valor de a utilizando a regra de Cramer.

Mude de Folha

8. Duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ (com $n \in \mathbb{N}$) dizem-se semelhantes se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = P^{-1}BP$. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes semelhantes.

[2.0] (a) Mostre que A^k e B^k são matrizes semelhantes, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

[2.0] (b) Sabendo que, para qualquer matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se tem $r(C) = r(C^T)$, mostre que $r(A) = r(B)$.
Sugestão: Justifique que $r(A) = r(PA)$, para qualquer matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Fim

1. D

2. D

3. D

4. A

5. C

6. (a) Calculemos então o determinante da matriz A, aplicando o Teorema de Laplace em relação à coluna 1:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{c_1}{=}} 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(0+4)+(2-0) = -4+2 = -2.$$

(b) Dado que $\det(A) \neq 0$ a matrix A é invertível e, portanto, a sua forma de escada reduzida é a matriz identidade I_3.

Como matrizes equivalentes por linha têm a mesma forma de escada reduzida, podemos afirmar que a forma de escada reduzida de B é igual à forma de escada reduzida de A. Logo, a forma de escada reduzida de B é também I_3.

O leitor pode verificar que

$$A \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} A_1 \xrightarrow[l_3 - l_1]{} A_2 \xrightarrow[l_3 - l_2]{} A_3 \xrightarrow[l_1 - l_3]{} A_4 \xrightarrow[l_2 + 2l_3]{} A_5 \xrightarrow[\frac{1}{2}l_2]{} I_3.$$

(c) A matriz A é invertível se, e só se, $\det(A) \neq 0$. Como em (a) verificámos que $\det(A) = -2 \neq 0$, podemos concluir que A é uma matriz invertível.

Sabemos que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ e, portanto,

$$\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}.$$

7. (a) Ora

$$\det C_{\alpha,\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha^2-1 \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ \beta & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{l_1 \longleftrightarrow l_3}{=} - \begin{vmatrix} \beta & 2 & -1 \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 \end{vmatrix} = -\beta(\alpha+1)(\alpha^2-1).$$

A matriz $C_{\alpha,\beta}$ é invertível se, e só se, $\det C_{\alpha,\beta} \neq 0$. Como

$$\det C_{\alpha,\beta} \neq 0 \iff -\beta(\alpha+1)(\alpha^2-1) \neq 0 \iff \beta \neq 0 \ \wedge \ \alpha \neq -1 \ \wedge \ \alpha \neq 1,$$

concluímos que $C_{\alpha,\beta}$ é invertível se, e só se, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Um sistema de equações lineares diz-se de Cramer se a matriz simples do sistema é invertível.

Assim, atendendo à alínea (a), o sistema $C_{\alpha,\beta}X = B_\alpha$ é de Cramer se, e só se, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) Observemos que para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, o sistema $C_{2,1}X = B_2$ é de Cramer, sendo

$$C_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e tendo-se $\det C_{2,1} \neq 0$. Aplicando a regra de Cramer, obtemos

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\left|C_{2,1}\right|} = \frac{0}{\left|C_{2,1}\right|} = 0.$$

8. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Suponhamos que as matrizes A e B são semelhantes. Então existe pelo menos uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = P^{-1}BP$.

(a) Dado $k \in \mathbb{N}$, é claro que

$$A^k = \underbrace{(P^{-1}BP)(P^{-1}BP)\dots(P^{-1}BP)(P^{-1}BP)}_{\text{onde } P^{-1}BP \text{ ocorre } k \text{ vezes}}.$$

Usando a propriedade associativa da multiplicação de matrizes, a definição de inversa de uma matriz e o facto de $I_nB = B = BI_n$, obtemos

$$A^k = P^{-1}(\underbrace{BB\dots BB}_{k \text{ vezes}})P = P^{-1}B^kP.$$

Em bom rigor, é necessário demonstrar por indução matemática que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(P^{-1}BP\right)^k = P^{-1}B^kP.$$

Para $k = 1$ é claro (por definição de potência de uma matriz quadrada) que $\left(P^{-1}BP\right)^k = P^{-1}BP = P^{-1}B^kP$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, suponhamos, por hipótese de indução, que

$$\left(P^{-1}BP\right)^m = P^{-1}B^mP.$$

De acordo com a definição de potência de uma matriz quadrada, temos que $\left(P^{-1}BP\right)^{m+1} = \left(P^{-1}BP\right)^m\left(P^{-1}BP\right)$. Fazendo uso da hipótese de indução, conclui-se que

$$\left(P^{-1}BP\right)^{m+1} = \left(P^{-1}B^mP\right)\left(P^{-1}BP\right).$$

Tendo presente a propriedade associativa da multiplicação de matrizes, obtemos

$$\left(P^{-1}BP\right)^{m+1} = \left(P^{-1}B^m\right)\left(PP^{-1}\right)(BP).$$

Por definição de inversa e atendendo a que $I_n(BP) = BP$, temos

$$\left(P^{-1}BP\right)^{m+1} = \left(P^{-1}B^m\right)(BP).$$

Usando a propriedade associativa da multiplicação de matrizes e a definição de potência de uma matriz quadrada, conclui-se que

$$\left(P^{-1}BP\right)^{m+1} = P^{-1}\left(B^mB\right)P = P^{-1}B^{m+1}P.$$

Dos argumentos acima expendidos resulta que $A^k = P^{-1}B^kP$ e por conseguinte A^k e B^k são matrizes semelhantes.

(b) Em primeiro lugar, vamos provar que: para toda a matriz invertível $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e para cada matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{r}(QC) = \mathrm{r}(C)$. Seja $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Suponhamos que $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e que Q é uma matriz invertível. Então (de acordo com a matéria leccionada) existem matrizes elementares $F_1, \ldots, F_p \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que $Q = F_1 \ldots F_p$. Assim temos que C e $F_1 \ldots F_p C = QC$ são equivalentes por linhas e por conseguinte $\mathrm{r}(QC) = \mathrm{r}(C)$.

Fazendo uso deste resultado, tendo presente que P^{-1} é uma matriz invertível e que $A = P^{-1}BP = (P^{-1})BP$, obtemos $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(BP)$. Por outro lado, atendendo a que $(BP)^\top = P^\top B^\top$, podemos concluir que

$$\mathrm{r}(BP) = \mathrm{r}(P^\top B^\top).$$

Como $P^\top$ é uma matriz invertível então $\mathrm{r}(P^\top B^\top) = \mathrm{r}(B^\top)$. Do exposto resulta que

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(BP) = \mathrm{r}(P^\top B^\top) = \mathrm{r}(B^\top) = \mathrm{r}(B).$$