FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Segundo Teste – 20 de Dezembro de 2017

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e meia de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$,

$$F = \big\langle (1,2,-1,0), (2,1,1,-3), (0,1,-1,1) \big\rangle.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A — A sequência $\big((1,2,-1,0), (2,1,1,-3), (0,1,-1,1)\big)$ não é uma base de F.

B — A sequência $\big((1,2,-1,0), (2,1,1,-3)\big)$ é uma sequência geradora de F.

C — Os subespaços $\langle (1,2,-1,0), (2,1,1,-3) \rangle$ e $\langle (1,2,-1,0), (0,1,-1,1) \rangle$, são iguais.

D — A sequência $\big((1,2,-1,0), (2,1,1,-3), (0,1,-1,1), (0,0,0,1)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Continua no verso desta folha

2. Considere os seguintes subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z = 0 \wedge w = 2z\right\}$$

e

$$G = \langle (1,1,0,0), (0,1,-1,0) \rangle.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $F = \langle (1,0,1,2), (1,1,0,0) \rangle$.

B $\dim F \cap G = 1$.

C $((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1))$ é base de $F + G$.

D $(2,2,0,2) \in F + G$.

3. Considere a base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\text{b.c.}_{\mathbb{R}^3} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, e a base $\mathcal{B} = ((1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1))$ de $\mathbb{R}^4$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

B f é injectiva.

C $f(1,0,0) = (2,0,0,0)$.

D $\operatorname{Im} f = \langle (2,2,2,2), (0,1,2,2), (0,1,2,3) \rangle$.

4. Considere uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ cujos únicos valores próprios são o 2 e o 3. Suponha que a multiplicidade algébrica do valor próprio 3 é igual a 2. Seja M_3 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 3 e seja

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tal que $M_3 = \langle X \rangle$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A é diagonalizavel.

B O polinómio característico de A é $(2-x)(3-x)^2$.

C $A^2X = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$.

D A multiplicidade geométrica do valor próprio 2 é igual a 1.

5. Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ e os pontos: $A = (2,2,1)$, $B = (3,2,1)$, $C = (3,1,2)$ e $Q = (0,1,2)$. Seja $\mathcal{P}$ o único plano que passa pelos pontos A, B e C. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{AC} = (1,-1,1)$ e $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,1,1)$.

B $y + z = 3$ é uma equação geral do plano $\mathcal{P}$.

C O ponto Q pertence ao plano $\mathcal{P}$.

D A área do triângulo de vértices A, B e C é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Segundo Teste – 20 de Dezembro de 2017

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Seja $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear definida por $f(a,b,c)=(a+b,a+c)$. Sejam $\mathcal{B}=((1,1,0),(1,0,1),(0,3,3))$ e $\mathcal{B}'=((2,1),(1,2))$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

[1,5] (a) Determine, apresentando todos os cálculos que efectuar, a matriz $A=\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

[2,0] (b) Determine uma base do $\operatorname{Nuc} f$ e indique, justificando, se a aplicação f é sobrejectiva.

[1,5] (c) Indique, justificando, a matriz de mudança de base Q para a qual se verifica:

$$QA=\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\text{b.c.}_{\mathbb{R}^2}).$$

Mude de Folha

7. Seja $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[0,6] (a) Verifique que $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de B associados ao mesmo valor próprio.

[1,5] (b) Determine $p_B(x)$, o polinómio característico de B. Deduza quais os valores próprios de B e as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,5] (c) Determine uma base para o subespaço próprio de B associado ao valor próprio 1 e justifique que $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ é base do subespaço próprio associado ao valor próprio 2.

[0,9] (d) Justifique que B é diagonalizável. Indique, justificando e sem efectuar cálculos, qual a matriz D que verifica $P^{-1}BP=D$, sendo $P=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Mude de Folha

8. Seja E um espaço vectorial real de dimensão finita $n \geqslant 1$. Seja $f:E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear. Nestas condições, mostre que:

[1,5] (a) f é sobrejectiva se, e só se, existe $v \in E$ tal que $f(v) \neq 0$.

[1,5] (b) f e injectiva se, e só se, $\dim E = 1$ e f é sobrejectiva.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica
Segundo Teste – 20 de Dezembro de 2017
Uma resolução com notas explicativas

1. D

2. C

3. C

4. A

5. A

6. (a) Para construir $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ teremos de determinar a imagem de cada um dos vectores da base $\mathcal{B}$ e escrever essa imagem como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}'$.

Assim, como

$$\begin{aligned} f(1,1,0) = (2,1) = &\quad 1(2,1) + 0(1,2) \\ f(1,0,1) = (1,2) = &\quad 0(2,1) + 1(1,2) \\ f(0,3,3) = (3,3) = &\quad 1(2,1) + 1(1,2) \end{aligned}$$

Podemos obter a matriz pretendida dispondo por colunas os coeficientes anteriormente obtidos. Assim teremos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Nuc} f &= \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(a,b,c) = (0,0)\big\} \\ &= \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (a+b, a+c) = (0,0)\big\} \\ &= \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b = 0 \wedge a+c = 0\big\} \\ &= \{(a,-a,-a) : a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1,-1,-1) : a \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1,-1) \rangle, \end{aligned}$$

donde a sequência $\mathcal{S} = ((1,-1,-1))$ é geradora de $\operatorname{Nuc} f$. Como $(1,-1,-1) \neq (0,0,0)$ deduzimos que $\mathcal{S}$ é linearmente independente e, por conseguinte, $\mathcal{S}$ é base do $\operatorname{Nuc} f$ e $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$.

Pelo Teorema da dimensão,

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Atendendo a que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$, deduzimos que $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Como $\operatorname{Im} f$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, concluímos que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ e logo f é sobrejectiva.

(c) Consideremos o seguinte esquema

$$\begin{tikzcd} \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f", "\boldsymbol{A}"'] \arrow[rr, bend right, "f", "\boldsymbol{QA}"'] & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "id_{\mathbb{R}^2}", "\boldsymbol{Q}"'] & \underset{b.c._{\mathbb{R}^2}}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}.$$

Tomando $Q = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}', \mathrm{b.c.}_{\mathbb{R}^2})$ obtem-se $QA = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathrm{b.c.}_{\mathbb{R}^2})$. Ora

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(2,1) = (2,1) &= 2(1,0) + 1(0,1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(1,2) = (1,2) &= 1(1,0) + 2(0,1). \end{aligned}$$

Assim, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

7. (a) Temos $B\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ pelo que $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ é vector próprio de B associado ao valor próprio 1. Também $B\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ pelo que $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ é vector próprio de B associado ao valor próprio 1.

(b) Temos

$$\begin{aligned} p_B(x) &= |B - xI_3| = \begin{vmatrix} -2-x & 1 & 2 \\ 0 & 1-x & 0 \\ -6 & 2 & 5-x \end{vmatrix} \underset{l_2}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (1-x)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2-x & 2 \\ -6 & 5-x \end{vmatrix} = \\ &= (1-x)\left[(-2-x)(5-x) + 12\right] = (1-x)(x^2 - 3x + 2) = (1-x)^2(2-x). \end{aligned}$$

Assim, os valores próprios de B são as soluções da equação $p_B(x) = 0$, que são o 1 e o 2, tendo-se m.a.$(1) = 2$ e m.a.$(2) = 1$.

(c) Pela alínea (a), a sequência de vectores

$$\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

é uma sequência de vectores próprios associados ao valor próprio 1. A sequência $\mathcal{S}$ é linearmente independente pelo Critério de Independência Linear, pois para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\alpha\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Como $\mathcal{S}$ é uma sequência linearmente independente de 2 vectores de M_1 e m.g.$(1) = \dim M_1 \leq$ m.a.$(1) = 2$, concluímos que $\mathcal{S}$ é base de M_2.

É facil verificar que $B\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, pelo que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ é vector próprio de B associado ao valor próprio 2. Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \neq 0_{3\times 1}$, a sequência $\mathcal{T} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de M_2. Por outro lado, m.g.$(1) = \dim M_2 \leq$ m.a.$(2) = 1$, donde deduzimos que $\mathcal{T}$ é base de M_2.

(d) Na alínea anterior mostrámos que m.g.$(1) = \dim M_1 = 2$ e que m.g.$(2) = \dim M_2 = 1$, pelo que a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de B é igual à ordem da matriz B. Logo, B é diagonalizavel.

Como vimos na alínea anterior, as sequências $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são sequências linearmente independentes de vectores próprios associados aos valores próprios 1 e 2, respectivamente. Atendendo à disposição dos vectores destas sequências nas colunas da matriz P deduzimos que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. (a) Suponhamos que f é sobrejectiva. Atendendo a que $1 \in \mathbb{R}$, então existe $v \in E$ tal que $f(v) = 1$. Logo $f(v) \neq 0$. Assim se conclui que existe $v \in E$ tal que $f(v) \neq 0$.

Para mostrar a recíproca, suponhamos que existe $v \in E$ tal que $f(v) \neq 0$. Portanto a sequência $(f(v))$ é linearmente independente. Como $(f(v))$ é uma sequência geradora de $\langle f(v) \rangle$ então $(f(v))$ é uma base de $\langle f(v) \rangle$ e por conseguinte $\dim \langle f(v) \rangle = 1$. Como $\langle f(v) \rangle \subseteq \operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}$ e $\dim \langle f(v) \rangle = 1 = \dim \mathbb{R}$ então $\langle f(v) \rangle = \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$. Do exposto resulta que f é sobrejectiva.

(b) Suponhamos que f é injectiva. Logo $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$ e por conseguinte $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$. Consequentemente, pelo teorema da dimensão, temos

$$n = \dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Como, por hipótese, $\dim E = n \geqslant 1$ então temos $\dim E = \dim \operatorname{Im} f = n \geqslant 1$. Por outro lado, atendendo a que $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}$, conclui-se que $\dim \operatorname{Im} f \leqslant 1$. Assim se conclui que

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} f = 1.$$

Tendo presente que $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}$ e que $\dim \operatorname{Im} f = 1 = \dim \mathbb{R}$, então deduz-se que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$. Logo f é sobrejectiva.

Para provar a recíproca, suponhamos que $\dim E = 1$ e que f é sobrejectiva. Logo $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ e por conseguinte $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R} = 1$. Então, pelo teorema da dimensão, temos

$$1 = \dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = (\dim \operatorname{Nuc} f) + 1.$$

Portanto $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$. Donde se tira que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$. Consequentemente, f é injectiva.