

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinala-a com um X na grelha de respostas.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 2 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ que verifica:

$$B \xrightarrow{l_1+l_2} B_1 \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} B_2 \xrightarrow{2l_3} I_3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A matriz B é invertível.

☐ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

☐ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

☐ B_2 é a matriz que se obtém da matriz identidade multiplicando por $\frac{1}{2}$ a linha 3.

Continua no verso desta folha

2. Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, w , sobre $\mathbb{R}$ cuja matriz ampliada é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & b & 0 & b+2 \end{array} \right]$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $a \neq 1$ e $b \neq 0$ então o sistema é possível determinado.
- ☐ B Se $a = 1$ e $b = 2$ então o sistema é possível, indeterminado com grau de indeterminação 2.
- ☐ C Para $a = 1$ e $b = 1$, o conjunto de soluções do sistema é o conjunto vazio.
- ☐ D Se $b = 0$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, o sistema é impossível.

3. Considere $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com $n > 1$, tal que $\det(A) = \alpha$ e $\det(B) = \beta \neq 0$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\det(2A) = 2^n \alpha$.
- ☐ B B é invertível e $\det(A^\top B^{-1}) = \frac{\alpha}{\beta}$.
- ☐ C $\det(B^4) = \beta^4$.
- ☐ D $\det(A + B) = \alpha + \beta$, para quaisquer matrizes A e B nas condições do enunciado.

4. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$,

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = c + d \wedge b = 0\} \quad \text{e} \quad G = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, -1) \rangle.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\dim G = 2$.
- ☐ B A sequência $((1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, -1))$ é uma base de G .
- ☐ C $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.
- ☐ D $G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = c \wedge b = d\}$

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ a base ortonormada e directa (e_1, e_2, e_3) e os vectores $u = e_1 - e_2$, $v = -2e_1 + e_2 + e_3$ e $w = 2e_1 + e_2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A sequência $(e_1 + 2e_2 - 2e_3, 2e_1 + e_2 + 2e_3, -2e_1 + 2e_2 + e_3)$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ B $u \times v = -e_1 + e_2 - e_3$.
- ☐ C $\sin(\angle(u, v)) = \frac{1}{2}$.
- ☐ D $(u \times v) \cdot w = -3$.

[Cotação] Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

[0,5] (a) Justifique, utilizando matrizes, que $(3, 1, -6)$ é solução do sistema $AX = B$.

[0,5] (b) Calcule o determinante de A .

[1,0] (c) Justifique que A é invertível e determine A^{-1} .

Mude de Folha

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$f(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ a-b & b \end{bmatrix}.$$

[1,0] (a) Determine uma base do núcleo de f e indique se f é injectiva.

[0,5] (b) Indique, justificando, a dimensão da imagem de f .

[1,0] (c) Considere a base $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
Determine $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}')$.

[0,5] (d) Seja $\mathcal{B}$ uma base arbitrária de $\mathbb{R}^3$. Utilizando matrizes de mudança de base relacione as matrizes $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}')$ e $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Mude de Folha

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Justifique que a matriz A tem apenas os valores próprios 0 e 2.

[0,5] (b) Mostre que $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 0.

[1,0] (c) Determine uma base do subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2.

[0,5] (d) Indique, justificando, se A é diagonalizável.

Mude de Folha

9. Num referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere a recta $r : 3x = 6y = 4z$ e o plano $\pi : 3x - 4z + 5 = 0$.

[0,5] (a) Justifique que a recta r é estritamente paralela ao plano π .

[1,0] (b) Determine a distância do plano π à recta r .

Mude de Folha

10. Sejam E, V espaços vectoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, $g : E \rightarrow V$ uma aplicação linear e F um subespaço vectorial de E . Mostre que:

[1,5] (a) $\dim g(F) = \dim F - \dim(F \cap \text{Nuc } g)$;

[1,5] (b) Se g é injectiva e $F \subseteq g(F)$ então $F = g(F)$.

Fim

1. B

2. A

3. D

4. C

5. B

6. (a) Para verificarmos que $(3, 1, -6)$ é solução do sistema $AX = B$ basta multiplicar a matriz simples do sistema A pela matriz coluna $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$. Assim como:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = B,$$

podemos concluir que $(3, 1, -6)$ é solução do sistema.

(b) Temos $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} \stackrel{c_3}{=} 1(-1)^{(3+3)} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1 + 2) = 1.$

- (c) Uma matriz é invertível se, e só se, o seu determinante for diferente de zero. Como $\det A = 1 \neq 0$ podemos afirmar que A é invertível. Determinemos a inversa de A ampliando a matriz A com a matriz identidade.

$$\begin{aligned} [A|I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[l_3 - 3l_1]{l_2 - l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{l_3 - 6l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + 2l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.}). \end{aligned}$$

Podemos então concluir que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$

7. (a) Sabemos que $\text{Nuc } f = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$

Como

$$\begin{aligned} f(a, b, c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 2b \\ a-b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2b = 0 \\ a-b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

tem-se:

$$\text{Nuc } f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0 \wedge b = 0\} = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle.$$

Como $(0, 0, 1)$ é não nulo e gerador do núcleo de f então a sequência $((0, 0, 1))$ é uma base do núcleo de f .

Para que f fosse injectiva teríamos de ter $\text{Nuc } f = \{(0, 0, 0)\}$, como $\text{Nuc } f = \langle (0, 0, 1) \rangle \neq \{(0, 0, 0)\}$ podemos afirmar que f não é injectiva.

- (b) O Teorema da Dimensão diz-nos que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Nuc } f) + \dim(\text{Im } f)$.

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e, pela alínea anterior, podemos deduzir que $\dim(\text{Nuc } f) = 1$, concluimos que $\dim(\text{Im } f) = 2$.

- (c) Para determinar a matriz da aplicação linear f , comecemos por determinar a imagem de cada um dos vectores da base do espaço de partida escrevendo-as como combinação linear dos vectores da base do espaço de chegada. Temos então:

$$f(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$f(0, 1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$f(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (d) Para $A = \mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}')$, consideremos o seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{P} & \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{A} & \mathcal{B}' \\ & \searrow f & & \nearrow AP & \end{array}$$

Podemos então concluir que

$$AP = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}') P,$$

onde P é a matriz de mudança de base $P = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$.

8. (a) Os valores próprios de A obtêm-se a partir do polinómio característico de A que é dado por $p_A(x) = |A - xI_3|$. Assim tem-se:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |A - xI_3| = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 3 & 2-x & 1 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} (2-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = \\ &= (2-x)[(1-x)(1-x) - 1] = (2-x)(x^2 - 2x) = -x(x-2)^2. \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são as soluções da equação $p_A(x) = 0$, que, neste caso, são o 0 e o 2, tendo-se $\text{m.a.}(0) = 1$ e $\text{m.a.}(2) = 2$.

- (b) Temos:

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0_{3 \times 1}$, conclui-se que $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 0.

(c) O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2 é o seguinte:

$$M_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3)X = 0_{3 \times 1}\}.$$

Ora

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+l_1]{l_2+3l_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}l_2]{-l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1+l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.r.}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge c = 0 \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Podemos então afirmar que a sequência $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é geradora de M_2 .

Como a sequência $\mathcal{S}$ é geradora de M_2 e é constituída por um único vector não nulo, é linearmente independente. Logo, a sequência $\mathcal{S}$ é uma base de M_2 .

(d) Pela alínea anterior podemos afirmar que $\text{m.g.}(2) = \dim M_2 = 1 < \text{m.a.}(2) = 2$. Como $\text{ma}(0) = 1 = \text{mg}(0)$, podemos afirmar que $\text{mg}(2) + \text{mg}(0) = 1 + 1 < 3$.

Concluimos assim que A não é diagonalizável.

9. (a) Sabemos que a recta r é paralela ao plano π se um vector director da recta for perpendicular a um vector normal ao plano.

Pela equação geral do plano temos que o vector $w = (3, 0, -4)$ é um vector perpendicular ao plano π .

Tomando a equação da recta, vemos que, por exemplo, os pontos $P = (0, 0, 0)$ e $Q = (4, 2, 3)$ pertencem à recta r . Deste modo, obtemos o vector $u = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (4, 2, 3)$ que é um vector director de r .

Como ambos os vectores são não nulos, serão perpendiculares se o seu produto interno for zero. Assim, temos:

$$w|u = (3, 0, -4)|(4, 2, 3) = 3 \times 4 + 0 \times 2 + (-4) \times 3 = 12 + 0 - 12 = 0$$

e, portanto, os vectores u e w são perpendiculares.

Para além disto, facilmente se verifica o ponto $P = (0, 0, 0)$ da recta r não pertence ao plano π .

Logo a recta r é estritamente paralela ao plano π .

- (b) A distância da recta r ao plano π é a distância de um ponto qualquer da recta ao plano π .

Considerando o ponto $P \in r$ e o vector $w \perp \pi$ determinados na alínea anterior e, atendendo a que para $A = (1, 0, 2)$ se verifica $3 \times 1 - 4 \times 2 + 5 = 0$, ou seja, $A \in \pi$, temos:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP}|w|}{\|w\|} = \frac{|(-1, 0, -2)|(3, 0, -4)|}{\|\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}\|} = \frac{|-1 \times 3 + 0 \times 0 + (-2) \times (-4)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{5}{5} = 1.$$

10. Sejam E, V espaços vectoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, g uma aplicação linear de E em V e F um subespaço vectorial de E .

(a) Consideremos a função $\varphi: F \rightarrow V$, definida do modo seguinte:

$$\varphi(u) = g(u).$$

Mostremos que φ é uma aplicação linear. Sejam $u, v \in F$. Por definição de φ , temos $\varphi(u + v) = g(u + v)$. Tendo em consideração que, por hipótese, g é uma aplicação linear, podemos concluir que

$$\varphi(u + v) = g(u + v) = g(u) + g(v).$$

De acordo com a definição de φ , $g(u) = \varphi(u)$ e $g(v) = \varphi(v)$. Deste modo, podemos concluir que

$$\varphi(u + v) = g(u + v) = g(u) + g(v) = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $w \in F$. Por definição da aplicação φ , temos que $\varphi(\lambda w) = g(\lambda w)$. Como, por hipótese, g é uma aplicação linear, então temos

$$\varphi(\lambda w) = g(\lambda w) = \lambda g(w).$$

Por definição de φ , $g(w) = \varphi(w)$ e por conseguinte

$$\varphi(\lambda w) = g(\lambda w) = \lambda g(w) = \lambda \varphi(w).$$

Neste contexto, é de observar que $\text{Nuc } \varphi = \{u \in F: \varphi(u) = 0_V\}$. Tendo presente a definição de φ , podemos concluir que $\text{Nuc } \varphi = \{u \in F: g(u) = 0_V\} = F \cap \text{Nuc } g$. Também é claro, por definição de φ , que $\text{Im } \varphi = \{\varphi(x): x \in F\} = \{g(x): x \in F\} = g(F)$. Do exposto resulta que: $\text{Nuc } \varphi = F \cap \text{Nuc } g$ e $\text{Im } \varphi = g(F)$. Atendendo a que, por hipótese, E é um espaço vectorial de dimensão finita então podemos concluir que F é um espaço vectorial de dimensão finita, uma vez que F é um subespaço de E . Aplicando o teorema da dimensão à aplicação linear $\varphi: F \rightarrow V$, conclui-se que

$$\dim F = \dim \text{Nuc } \varphi + \dim \text{Im } \varphi.$$

Por outro lado, de acordo com o que acima foi exposto, sabemos que $\dim \text{Nuc } \varphi = \dim (F \cap \text{Nuc } g)$ e $\dim \text{Im } \varphi = \dim g(F)$. Donde se conclui que $\dim F = \dim (F \cap \text{Nuc } g) + \dim g(F)$. Logo

$$\dim g(F) = \dim F - \dim (F \cap \text{Nuc } g).$$

- (b) Suponhamos que g é injectiva e que $F \subseteq g(F)$. Como, por hipótese, g é injectiva então $\text{Nuc } g = \{0_E\}$. Consequentemente, $\text{Nuc } \varphi = F \cap \text{Nuc } g = F \cap \{0_E\} = \{0_E\}$. Usando o resultado obtido na alínea (a), conclui-se que

$$\dim g(F) = \dim F - \dim (F \cap \text{Nuc } g) = \dim F.$$

Como $g(F)$ é um espaço vectorial de dimensão finita, $\dim g(F) = \dim F$ e $F \subseteq g(F)$ então $F = g(F)$.

Fim