FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

Primeiro Teste – 07 de Novembro de 2018

**PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL**

**Nome:**______________________________

**Número de caderno:** | | | | | | |

Grelha de Respostas

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | | | | |
| **2.** | | | | |
| **3.** | | | | |
| **4.** | | | | |
| **5.** | | | | |

## Atenção

**Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e meia de prova.**

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

  **A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.**
- **Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

**1.** Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\left((AB)^\top\right)_{32} = 4$.

B A matriz $A$ é invertível e $\det A = 2$.

C O sistema $AX = 0$ é um sistema possível determinado.

D A forma de escada reduzida de $B$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

**2.** Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ obtida a partir de $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ efetuando as seguintes transformações elementares sobre linhas:

$$A \xrightarrow[2l_1]{} A_1 \xrightarrow[l_2+(-3)l_1]{} A_2 \xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_3]{} B.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\det A = 5$ então $\det B = -\frac{5}{2}$.

B $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = A_2$.

C Se $B = I_3$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D Se $A$ é invertível então $A_1, A_2$ e $B$ são invertíveis.

**3.** Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas $x, y, z$, sobre $\mathbb{R}$, cuja matriz ampliada é equivalente por linhas à matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & b-a & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a^2-2 & a \end{array}\right].$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $a \neq b$ e $a \notin \{-1, 1\}$ então o sistema é possível determinado.

B Se $a = -1$ então, para qualquer $b \in \mathbb{R}$, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

C Se $a = 1$ e $b = 1$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

D Se $a = 1$ e $b \neq 1$ então o sistema é impossível.

**4.** Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ tal que $\det A = 2$ e $\det B = -3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $AB$ pode escrever-se como o produto de matrizes elementares.

B A é invertível e $\det(A^{-1}B^{\top}) = -\frac{3}{2}$.

C $\det(-2B) = 6$.

D Para qualquer matriz invertível $C \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ tem-se $\mathrm{r}(AC) = 5$.

**5.** Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $G = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \right\}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

B $F = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = 1\}$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

C $H = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é invertível}\}$ não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

D $S = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ não é invertível }\}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se $n > 1$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

**Álgebra Linear e Geometria Analítica**

Primeiro Teste – 07 de Novembro de 2018

---

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

**6.** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

[2.0] (a) Determine, apresentando todos os cálculos efectuados, $\det(A(4|4))$ e $\widehat{A}_{14}$.

[2.0] (b) Calcule o determinante de $A$ e indique, justificando, para que valores de $\alpha$ e $\beta$ a matriz $A$ é invertível.

[1.5] (c) Tomando $\alpha = 2$, determine a inversa da matriz $A(4|4)$.

Mude de Folha

**7.** Considere a matriz $C_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha+3 & 1 & \beta \\ -1 & 3 & \beta-1 & \beta \end{bmatrix}.$$

[2.0] (a) Discuta a característica de $C_{\alpha,\beta}$ em função de $\alpha$ e de $\beta$.

[2.0] (b) Verifique que para $\underline{\alpha = -3 \text{ e } \beta = 0}$ o sistema $C_{\alpha,\beta}X = 0$ é possível indeterminado e indique, justificando, o conjunto das soluções do sistema.

Mude de Folha

[1.0] (a) $\det(\text{adj } A) = \dfrac{1}{(\det A)^{n-1}}$.

[1.0] (b) A matriz adj $A$ é invertível e $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj } A$.

[1.0] (c) Se $\det A = 1$ então $A^{-1} = A$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

Uma resolução com notas explicativas

**1.** D

**2.** A

**3.** C

**4.** C

**5.** D

**6.** (a) Calculemos o determinante da matriz $A(4|4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como a matriz $A(4|4)$ é triangular inferior o seu determinante corresponde ao produto dos elementos da diagonal principal, donde $\det(A(4|4)) = \alpha$. O complemento algébrico da posição $(1,4)$ da matriz $A$ é dado por

$$\widehat{A}_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{c_2}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (-1)\alpha(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \alpha(2-3) = -\alpha.$$

(b) Calculemos o determinante de $A$ aplicando o Teorema de Lapalace à quarta coluna:

$$\det(A) = \beta \cdot \widehat{A}_{14} = -\alpha\beta.$$

A matriz $A$ é invertível se, e só se, $\det(A) \neq 0$. Portanto, $A$ é invertível se, e só se, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(c) Determinemos a inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtida de $A(4|4)$ com $\alpha = 2$. Tem-se

$$[B|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3-2l_1]{l_2-l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_3|B^{-1}].$$

Logo, a inversa de $B$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**7.** (a) Dado que a característica da matriz $C_{\alpha,\beta}$ é o número de linhas não nulas de uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a $C_{\alpha,\beta}$, tem-se:

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha+3 & 1 & \beta \\ -1 & 3 & \beta-1 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha+3 & 1 & \beta \\ 0 & \alpha+3 & \beta+1 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha+3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} = C'.$$

Assim $\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta}) = \mathrm{r}(C')$ Podemos então considerar os seguintes casos:

- Se $\alpha + 3 \neq 0 \wedge \beta \neq 0$ então $C' = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha+3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$ (f.e.) e, portanto, $\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta}) = 3$;

- Se $\alpha+3\neq 0\wedge\beta=0$ então $C'=\begin{bmatrix}1&\alpha&2&0\\0&\alpha+3&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ (f.e.) e, portanto, $\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta})=2$;
- Se $\alpha+3=0\wedge\beta\neq 0$ então $C'=\begin{bmatrix}1&-3&2&0\\0&0&1&\beta\\0&0&\beta&0\end{bmatrix}\xrightarrow{l_3-\beta l_2}\begin{bmatrix}1&-3&2&0\\0&0&1&\beta\\0&0&0&-\beta^2\end{bmatrix}$ (f.e.) e, portanto, $\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta})=3$;
- Se $\alpha+3=0\wedge\beta=0$ então $C'=\begin{bmatrix}1&-3&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ (f.e.) e, portanto, $\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta})=2$.

Podemos então concluir que para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$,

se $\beta\neq 0$ então $\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta})=3$;
se $\beta=0$ então $\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta})=2$.

(b) Para para $\alpha=-3$ e $\beta=0$, pela alínea (a), $\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta})=2=\mathrm{r}([C_{\alpha,\beta}|0])<4=$nº de incógnitas do sistema. Podemos assim concluir que o sistema $C_{\alpha,\beta}X=0$ é possível indeterminado com grau de indeterminação $g.i.=4-\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta})=4-2=2$.

Determinemos o conjunto de soluções do sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&-3&2&0&0\\0&0&1&0&0\\-1&-3&-1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{l_3+l_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-3&2&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{l_3-l_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-3&2&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{l_1-2l_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-3&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\text{ (f.e.r.).}$$

Deste modo, o sistema correspondente é:

$$\begin{cases}x=3y\\z=0\\0=0\end{cases}.$$

Temos então que o conjunto de soluções do sistema é

$$\text{C.S.}=\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in\mathbb{R}^4:\alpha_1=3\alpha_2\wedge\alpha_3=0\}=\{(3\alpha_2,\alpha_2,0,\alpha_4)):\alpha_2,\alpha_4\in\mathbb{R}\}.$$

**8.** Seja $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Suponhamos que $A$ é uma matriz invertível e que

$$A=\det A\,\mathrm{adj}\,A.$$

(a) Seja $\alpha=\det A$. Como $A$ é invertível podemos afirmar que $\det(A)\neq 0$. Tendo presente que $\mathrm{adj}\,A$ é uma matriz quadrada de ordem $n$ e que, por hipótese, $A=\alpha\,\mathrm{adj}\,A$ então, fazendo uso de um resultado leccionado nas aulas teóricas, conclui-se que: $\det A=\alpha^n\det(\mathrm{adj}\,A)$. Como $\alpha=\det A$ então

$$\det A=(\det A)^n\det(\mathrm{adj}\,A).$$

Tendo em consideração que, por hipótese, $A$ é uma matriz invertível, ou equivalentemente que $\det A\neq 0$, temos

$$\det(\mathrm{adj}\,A)=\frac{\det A}{(\det A)^n}=\frac{1}{(\det A)^{n-1}}.$$

(b) Como $\det A \neq 0$ e, por hipótese, $A = \det A \operatorname{adj} A$ então

$$\frac{1}{\det A} A = \operatorname{adj} A.$$

Atendendo a que, por hipótese, $A$ é invertível então $\operatorname{adj} A$ é invertível e

$$(\operatorname{adj} A)^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right)^{-1} A^{-1} = (\det A) A^{-1}.$$

Por outro lado, de acordo com a matéria leccionada nas aulas teóricas, temos que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Assim, do exposto resulta que

$$(\operatorname{adj} A)^{-1} = (\det A) A^{-1} = \det A \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A.$$

(c) Suponhamos que $\det A = 1$. Como, por hipótese, $A = \det A \operatorname{adj} A$ então

$$A = \operatorname{adj} A.$$

Por outro lado, de acordo com a matéria leccionada nas aulas teóricas, temos que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Atendendo a que $\det A = 1$ e $A = \operatorname{adj} A$, temos

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = 1A = A.$$