

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e meia de prova.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$,

$$F = \langle (0, 1, -1), (1, 2, 3), (1, 4, 1) \rangle \quad \text{e} \quad G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A sequência $((1, 2, 3), (0, 1, -1))$ é uma base de F .
- ☐ B A sequência $((0, 1, -1), (1, 2, 3), (2, 1, 0), (0, 0, 1))$ é uma sequência geradora de $F + G$.
- ☐ C $\dim(F \cap G) = 0$.
- ☐ D A sequência $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$ é uma sequência geradora de G .

Continua no verso desta folha

2. Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ uma base de um espaço vectorial E e sejam F e G subespaços de E tais que:

$$F = \langle e_1, e_3 \rangle \quad G = \langle e_2, e_4 \rangle$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A sequência $(e_2, e_1 + e_2, -e_3, 2e_4)$ é uma base de E .
- ☐ B $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.
- ☐ C $E = F \oplus G$.
- ☐ D Existe um vector $v \in E$ tal que a sequência (e_1, e_2, e_3, e_4, v) não é geradora de E .

3. Considere a base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ e seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $f(-1, 0, 0) = (0, -1, -3)$.
- ☐ B f é injectiva.
- ☐ C $(3, 3, 3)$ é um vector próprio de f associado ao valor próprio 1.
- ☐ D 1, 2, e 3 são os valores próprios de f .

4. Considere uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ não invertível tal que :

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A é diagonalizável.
- ☐ B Se $p_A(x)$ é o polinómio característico de A , então $p_A(0) = 0$.
- ☐ C Existe uma matriz invertível P talque $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- ☐ D A matriz A admite um valor próprio α que verifica $\text{mg}(\alpha) < \text{ma}(\alpha)$.

5. Seja (e_1, e_2, e_3) uma base ortonormada e directa de $\mathbb{R}^3$. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vectores $u = e_1 - 2e_3$, $v = 2e_1 + 2e_2 + e_3$, $w = 3e_3$ e o subespaço $F = \langle u, v \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $u \times v = 4e_1 - 5e_2 + 2e_3$.
- ☐ B $(u \times v) \cdot w = 6$.
- ☐ C $F^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - 5y + 2z = 0\}$
- ☐ D $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}u, \frac{1}{3}v\right)$ é uma base ortonormada de F .

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.
[Cotação]

6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear definida por

$$f(a, b, c) = (a + b, c, c, 0), \text{ para qualquer } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Considere as bases:

$\mathcal{B}_1 = ((0, 0, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0))$ de $\mathbb{R}^3$ e

$\mathcal{B}_2 = ((1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0))$ de $\mathbb{R}^4$.

- [1,5] (a) Determine uma base do núcleo de f e indique, justificando, se f é injectiva.
[1,0] (b) Determine a dimensão da imagem de f e indique, justificando, se f é sobrejectiva.
[1,5] (c) Determine, apresentando todos os cálculos, a matriz $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.
[1,5] (d) Sem efectuar cálculos indique, justificando, uma matriz de mudança de base P para a qual se verifica:

$$AP = \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2).$$

Mude de Folha

7. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- [1,0] (a) Determine o polinómio característico de B . Deduza quais os valores próprios de B e as respectivas multiplicidades algébricas.
[1,5] (b) Determine uma base para o subespaço próprio de B associado ao valor próprio 3 e justifique que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de B associado ao valor próprio 2.
[1,5] (c) Mostre que B é diagonalizável e indique, justificando, uma matriz P que verifique

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Mude de Folha

8. Sejam E, F, G espaços vectoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$ aplicações lineares. Nestas condições, mostre que:

- [1,0] (a) $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g)$ e $\text{Nuc}(f) \subseteq \text{Nuc}(g \circ f)$.
[1,0] (b) $\dim \text{Im}(g \circ f) \leq \min\{\dim \text{Im}(g), \dim \text{Im}(f)\}$.
[1,0] (c) Se f é um isomorfismo então $\dim \text{Im}(g \circ f) = \dim \text{Im}(g)$.

Fim

1. C

2. D

3. A

4. D

5. C

6. (a) Como sabemos, $\text{Nuc } f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = (0, 0, 0, 0)\}$.

Dado que

$$f(a, b, c) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (a + b, c, c, 0) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \\ c = 0 \end{cases},$$

deduzimos que

$$\text{Nuc } f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = -b \wedge c = 0\} = \{(-b, b, 0) : b \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, 0) \rangle.$$

Como a sequência $((-1, 1, 0))$, é uma sequência geradora do $\text{Nuc } f$ constituída por um único vector não nulo então a sequência $((-1, 1, 0))$ é uma base de $\text{Nuc } f$.

Além disso, como $\text{Nuc } f \neq \{(0, 0, 0)\}$ concluímos que f não é injectiva.

(b) Pelo Teorema da Dimensão sabemos que

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f.$$

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e, pela alínea anterior, $\dim \text{Nuc } f = 1$ (determinou-se uma base de $\text{Nuc } f$ com um único vector), podemos concluir que $\dim \text{Im } f = 2$.

Para que f fosse sobrejectiva, teríamos de ter $\mathbb{R}^4 = \text{Im } f$, ou equivalentemente, $\dim \text{Im } f = 4$. Como $\dim \text{Im } f = 2$, concluímos que f não é sobrejectiva.

(c) Para determinar a matriz da aplicação linear f , começemos por determinar a imagem de cada um dos vectores da base do espaço de partida escrevendo-as como combinação linear dos vectores da base do espaço de chegada. Temos então:

$$\begin{aligned} f(0, 0, 1) &= (0, 1, 1, 0) = 0(1, 1, 0, 0) + 1(1, 1, 1, 0) + 0(1, 1, 1, 1) - 1(1, 0, 0, 0) \\ f(1, -1, 0) &= (0, 0, 0, 0) = 0(1, 1, 0, 0) + 0(1, 1, 1, 0) + 0(1, 1, 1, 1) + 0(1, 0, 0, 0) \quad . \\ f(1, 0, 0) &= (1, 0, 0, 0) = 0(1, 1, 0, 0) + 0(1, 1, 1, 0) + 0(1, 1, 1, 1) + 1(1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

(d) Consideremos o seguinte esquema

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^4 \\
 \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{P} & \mathcal{B}_1 & \xrightarrow{A} & \mathcal{B}_2 \\
 & \searrow f & & \nearrow & \\
 & & AP & &
 \end{array}$$

Para que $AP = \mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_2)$ teremos de considerar $P = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_1)$.

Como

$$\begin{aligned}
 (1, 0, 0) &= 0(0, 0, 1) + 0(1, -1, 0) + 1(1, 0, 0) \\
 (0, 1, 0) &= 0(0, 0, 1) - 1(1, -1, 0) + 1(1, 0, 0) \\
 (0, 0, 1) &= 1(0, 0, 1) + 0(1, -1, 0) + 0(1, 0, 0)
 \end{aligned}$$

teremos,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. (a) O polinómio característico de B é dado por $p_B(x) = |B - xI_n|$. Assim tem-se:

$$\begin{aligned}
 p_B(x) &= |B - xI_3| = \begin{vmatrix} 7-x & 2 & -5 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 4 & 2 & -2-x \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} (3-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7-x & -5 \\ 4 & -2-x \end{vmatrix} = \\
 &= (3-x)[(7-x)(-2-x) + 20] = (3-x)(x^2 - 5x + 6) = -(x-3)^2(x-2).
 \end{aligned}$$

Os valores próprios de B são as soluções da equação $p_B(x) = 0$, que, neste caso, são o 3 e o 2, tendo-se $\text{m.a.}(3) = 2$ e $\text{m.a.}(2) = 1$.

- (b) O subespaço próprio de B associado ao valor próprio 3 é o seguinte:

$$M_3 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (B - 3I_3)X = 0_{3 \times 1}\}.$$

Ora

$$B - 3I_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 + (-1)l_1} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f.e.).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 M_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : 4a + 2b - 5c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = -\frac{1}{2}b + \frac{5}{4}c \right\} \\
 &= \left\{ b \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Do exposto resulta que a sequência $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é geradora de M_3 .

A sequência $\mathcal{S}$ é linearmente independente pelo Critério de Independência Linear, pois para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\alpha \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \alpha = \beta = 0.$$

Com efeito, se $\alpha \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então temos $-\frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{4}\beta = 0$, $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Do exposto resulta que sequência $\mathcal{S}$ é uma base de M_3 . Logo $\text{m.g.}(3) = \dim M_3 = 2 = \text{m.a.}(3) = 2$.

Por outro lado, temos que

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0_{3 \times 1}$, conclui-se que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de B associado ao valor próprio 2.

- (c) Na alínea anterior mostrámos que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertence ao subespaço próprio de B associado ao valor próprio 2. Atendendo a que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0_{3 \times 1}$, a sequência $\mathcal{T} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de M_2 .

Por outro lado, $\text{m.g.}(2) = \dim M_2 \leq \text{m.a.}(2) = 1$. Logo $\dim M_2 = 1$ e por conseguinte $\mathcal{T}$ é uma base de M_2 .

Deste modo temos que $\text{m.g.}(3) = 2$ e que $\text{m.g.}(2) = \dim M_2 = 1$, pelo que a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de B é igual à ordem da matriz B . Logo, B é diagonalizável.

Como vimos, as sequências $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são sequências linearmente independentes de vectores próprios associados aos valores próprios 3 e 2, respectivamente.

Atendendo a que $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ e $\mathcal{T} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ conclui-se, de acordo com a matéria leccionada nas aulas teóricas, que a matriz que se obtém dispondo estes vectores nas colunas é uma matriz diagonalizante de B . A matriz P determina uma matriz diagonal constituída pelos valores próprios de B associados a cada um dos vectores próprios que figuram nas colunas de P .

Assim, para

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{obtem-se a matriz diagonal} \quad D = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Sejam E, F, G espaços vectoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$ aplicações lineares.

- (a) Seja $v \in \text{Im}(g \circ f)$. Por definição de $\text{Im}(g \circ f)$, existe pelo menos um $u \in E$ tal que $v = (g \circ f)(u)$. Por definição de composição de funções, temos $v = g(f(u))$. Seja $z = f(u)$. Como f é uma função de E em F então $z \in F$. Assim temos $z \in F$ e $v = g(z)$. Logo $v \in \text{Im}(g)$. Do exposto resulta que $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g)$.

Seja $x \in \text{Nuc}(f)$. Por definição de $\text{Nuc}(f)$, temos que $x \in E$ e $f(x) = 0_F$. Atendendo a que g é uma aplicação linear, conclui-se que $g(f(x)) = g(0_F) = 0_G$. Por definição de composição de funções, sai que $(g \circ f)(x) = 0_G$. Donde se conclui que $x \in \text{Nuc}(g \circ f)$. Da argumentação acima expandida sai que $\text{Nuc}(f) \subseteq \text{Nuc}(g \circ f)$.

- (b) Tendo presente que, por hipótese, G é um espaço vectorial de dimensão finita, conclui-se que os subespaços vectoriais (de G) $\text{Im}(g \circ f)$ e $\text{Im}(g)$ têm dimensão finita. Além disso,

$$\dim \text{Im}(g \circ f) \leq \dim \text{Im}(g),$$

uma vez que (pela alínea (a)) $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g)$. Por outro lado, também pela alínea (a), $\text{Nuc}(f) \subseteq \text{Nuc}(g \circ f)$ e por conseguinte

$$\dim \text{Nuc}(f) \leq \dim \text{Nuc}(g \circ f),$$

uma vez que $\text{Nuc}(f)$ e $\text{Nuc}(g \circ f)$ são subespaços vectoriais do espaço vectorial E que, por hipótese, tem dimensão finita. Pelo do teorema das dimensões (para aplicações lineares), neste contexto temos $\dim E - \dim \text{Im}(f) = \dim \text{Nuc}(f)$ e $\dim \text{Nuc}(g \circ f) = \dim E - \dim \text{Im}(g \circ f)$. Como já mostrámos que $\dim \text{Nuc}(f) \leq \dim \text{Nuc}(g \circ f)$, então podemos concluir que

$$\dim \text{Im}(g \circ f) \leq \dim \text{Im}(f).$$

Assim temos $\dim \text{Im}(g \circ f) \leq \dim \text{Im}(g)$ e $\dim \text{Im}(g \circ f) \leq \dim \text{Im}(f)$. Logo

$$\dim \text{Im}(g \circ f) \leq \min\{\dim \text{Im}(g), \dim \text{Im}(f)\}$$

- (c) Do que acima foi exposto (na alínea (b)) podemos concluir que: para quaisquer espaços vectoriais de dimensão finita, U, V, W (sobre $\mathbb{K}$) e para quaisquer aplicações lineares $h: U \rightarrow V, j: V \rightarrow W$, $\dim \text{Im}(j \circ h) \leq \dim \text{Im}(j)$ e $\dim \text{Im}(j \circ h) \leq \dim \text{Im}(h)$

Sejam E, F, G espaços vectoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$ aplicações lineares. Suponhamos que f é um isomorfismo. Tendo em consideração que a aplicação inversa de f (denotada por f^{-1}) é uma aplicação linear de F em E e que $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$, podemos concluir por aplicação do enunciado da alínea (b) que $\dim \text{Im}(g) \leq \dim \text{Im}(g \circ f)$. Usando, novamente, a alínea (b), conclui-se que $\dim \text{Im}(g \circ f) \leq \dim \text{Im}(g)$. Do exposto resulta que $\dim \text{Im}(g \circ f) = \dim \text{Im}(g)$.