

**PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL**

Nome: \_\_\_\_\_

Número de caderno: 

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

Grelha de Respostas

|    | A | B | C | D |
|----|---|---|---|---|
| 1. |   |   |   |   |
| 2. |   |   |   |   |
| 3. |   |   |   |   |
| 4. |   |   |   |   |
| 5. |   |   |   |   |
| 6. |   |   |   |   |
| 7. |   |   |   |   |

**Atenção**

Os primeiros 7 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 7 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinala-a com um X na grelha de respostas.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:
  - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
  - Se responder correctamente: +1,2 valores;
  - Se responder erradamente: -0,4 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 7) é dada por  $\max\{0, M\}$ , onde M designa a soma das classificações obtidas nos 7 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Em  $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$ , considere as matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A As matrizes  $E_1, E_2, E_3$ , e  $E_4$  são matrizes elementares.
- ☐ B Se  $B = E_4 E_3 E_2 A$  então  $A \xrightarrow{2l_1} A_1 \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} A_2 \xrightarrow{l_3 - l_1} B$ .
- ☐ C  $(E_3)^{-1} = E_3$ .
- ☐ D  $E_1 E_2 = E_2 E_1$ .

2. Para cada  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ , considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas  $x, y, z$ , sobre  $\mathbb{R}$ , cuja matriz ampliada é equivalente por linhas à matriz

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2-a & -1 & a \\ 0 & 0 & a-b & b \end{array} \right].$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se  $a = b = 0$  então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.
- ☐ B Se  $a = 2$  e  $b = 4$  então o conjunto das soluções do sistema é  $\mathcal{C} = \{(2, \alpha_2, -2) : \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ .
- ☐ C Para qualquer  $a \in \mathbb{R}$  com  $a \neq b$ , o sistema é possível.
- ☐ D Se  $a \neq 2$  e  $a \neq b$  então a matriz simples do sistema é invertível e o sistema é possível determinado.

3. Sejam  $A, B, C \in \mathcal{M}_{6 \times 6}(\mathbb{R})$  tais que  $\det A = 2$ ,  $\det B = 4$  e  $\det C = -2$ .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se  $A'$  se obteve, a partir de  $A$ , efectuando 3 transformações elementares do tipo I e 5 do tipo III, sobre linhas, então  $\det(A') = -2$ .
- ☐ B A matriz  $A$  é invertível e  $\det(BA^{-1}) = \det(A)$ .
- ☐ C  $\det(ABC) = -16$ .
- ☐ D  $\det(-2C) = 2^7$ .

4. Seja  $E$  um espaço vectorial sobre  $\mathbb{K}$  e seja  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  uma sequência de vectores de  $E$ .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A sequência  $(u_1, u_2, u_1 + u_2, u_3 + u_4)$  é uma sequência linearmente independente.
- ☐ B Se  $\dim E = 5$  então a sequência  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  não é uma sequência geradora de  $E$ .
- ☐ C Se a sequência  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  é uma sequência linearmente independente e  $\dim E = 4$  então  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  é uma base de  $E$ .
- ☐ D Se  $\dim E = 3$  então a sequência  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  é uma sequência linearmente dependente.

5. Considere a aplicação linear  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y, z) = (x - z, 2y)$ , para qualquer  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A  $\text{Nuc } f = \{(z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ .
- ☐ B  $\dim \text{Im } f = 2$ .
- ☐ C  $f$  é sobrejectiva mas não é injectiva.
- ☐ D  $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  em que  $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2))$  e  $\mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 0))$ .

6. Seja  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$  uma base de  $\mathbb{R}^3$  e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a aplicação linear tal que:

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Os valores próprios de  $f$  são 0 e 2.
- ☐ B  $f(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$  e, portanto,  $(1, 1, 1)$  é um vector próprio de  $f$  associado ao valor próprio 2.
- ☐ C A matriz  $A$  não é diagonalizável.
- ☐ D Como  $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (3, 2, 0), (2, 1, 1))$  é uma base de vectores próprios de  $f$ , a matriz  $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$  é uma matriz diagonal.

7. Considere a recta  $r$  de equação vectorial  $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, -1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , a recta  $s$  com equações normais  $x - 1 = y = z$  e o plano  $\pi$  de equação geral  $x + y + z - 2 = 0$ .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A recta  $s$  é perpendicular ao plano  $\pi$ .
- ☐ B Os vectores  $(1, 0, -1)$  e  $(0, 1, -1)$  são vectores directores do plano  $\pi$ .
- ☐ C O ângulo formado pelas rectas  $s$  e  $r$  é  $\frac{\pi}{2}$ .
- ☐ D A recta  $r$  é estritamente paralela ao plano  $\pi$ .

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.  
[Cotação]

8. Considere os subespaços vectoriais de  $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b \wedge c = -d\} \quad \text{e} \quad G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b = -d \wedge c = d\}$$

- [0,5] (a) Indique uma base de  $F$  e uma base de  $G$ .  
[1,0] (b) Determine a dimensão de  $F + G$  e a dimensão de  $F \cap G$ .  
[1,0] (c) Verifique que  $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ .

Mude de Folha

9. Considere a aplicação linear  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada pela matriz  $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , em que  
 $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 0))$  e  $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ .

- [0,5] (a) Determine  $f(1, 2)$ , usando a matriz  $A$ .  
[1,0] (b) Justifique que  $f$  não é sobrejectiva mas é injectiva.  
[1,0] (c) Usando matrizes de mudança de base determine a matriz  $B = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^3)$ .

Mude de Folha

10. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

- [1,0] (a) Justifique que 2 e 3 são os únicos valores próprios de  $A$  e indique a sua multiplicidade algébrica.  
[0,5] (b) Mostre que  $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  é um vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio 3.  
[1,0] (c) Verifique que a multiplicidade geométrica do valor próprio 2 é 1.  
[0,5] (d) Indique se  $A$  é diagonalizável.

Mude de Folha

11. Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que  $A + A^\top = 4I_n$ . Mostre que:

- [0,6] (a) A matriz  $A$  não é hemi-simétrica.  
[1,5] (b)  $\alpha$  é valor próprio de  $A$  se, e só se,  $4 - \alpha$  é valor próprio de  $A^\top$ .  
[1,5] (c) Se 4 é valor próprio de  $A$  então  $A$  não é invertível.

Fim

1. B
2. C
3. D
4. A
5. D
6. C
7. D
8. (a) Começamos por determinar uma base para o subespaço  $F$ . Tem-se:

$$\begin{aligned}
 F &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b \wedge c = -d\} \\
 &= \{(b, b, -d, d) : b, d \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{b(1, 1, 0, 0) + d(0, 0, -1, 1) : b, d \in \mathbb{R}\} \\
 &= \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1) \rangle.
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que a sequência  $((1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$  é uma sequência geradora de  $F$ . Tal sequência é também linearmente independente pois os vectores da sequência são as linhas não nulas da matriz em forma de escada  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  (f.e.).

Logo  $((1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$  é uma base de  $F$ .

Para o subespaço  $G$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 G &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b = -d \wedge c = d\} \\
 &= \{(a, -d, d, d) : a, d \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{a(1, 0, 0, 0) + d(0, -1, 1, 1) : a, d \in \mathbb{R}\} \\
 &= \langle (1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 1) \rangle.
 \end{aligned}$$

Deste modo, concluímos que a sequência  $((1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 1))$  é uma sequência geradora de  $G$ . Os vectores da sequência são as linhas não nulas da matriz em forma de escada  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  (f.e.), pelo que a sequência é também linearmente independente.

Logo  $((1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 1))$  é uma base de  $G$ .

- (b) Como  $F = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1) \rangle$  e  $G = \langle (1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 1) \rangle$ , podemos afirmar que

$$F + G = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 1) \rangle.$$

Dado que

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{l_3 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{l_4 - l_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_4 + l_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.})
 \end{aligned}$$

concluimos que  $((1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 1))$  é uma base de  $F+G$ , pelo que  $\dim(F+G) = 4$ . Como  $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ ,  $\dim F = 2 = \dim G$ , e  $\dim(F+G) = 4$ , concluimos que  $\dim(F \cap G) = 0$ .

- (c) Como  $F$  e  $G$  são subespaços de  $\mathbb{R}^4$  podemos afirmar que  $F + G$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^4$ . Dado que  $\dim(F + G) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ , concluímos que  $F + G = \mathbb{R}^4$ .

Para demonstrar que  $F \oplus G = \mathbb{R}^4$  basta verificar que  $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$  ou, equivalentemente, que  $\dim(F \cap G) = 0$ , o que é verdadeiro conforme se concluiu em (b).

9. (a) Determinemos a sequência de coordenadas do vector  $(1, 2)$  na base  $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 0))$ .

Tem-se,  $(1, 2) = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, 0)$  se, e só se,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  e  $\alpha_1 = 2$ , ou, equivalentemente,  $\alpha_1 = 2$  e  $\alpha_2 = -1$ . Como  $(2, -1)$  é a sequência de coordenadas do vector  $(1, 2)$  na base  $\mathcal{B}$ , podemos determinar a sequência das coordenadas de  $f(1, 2)$  na base  $\mathcal{B}'$  calculando o produto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \left( = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right).$$

Assim.

$$\begin{aligned} f(1, 2) &= 2(1, 0, 0) + (-1)(1, 1, 0) + (-3)(1, 1, 1) \\ &= (2, 0, 0) + (-1, -1, 0) + (-3, -3, -3) \\ &= (-2, -4, -3). \end{aligned}$$

- (b) Conforme é conhecido tem-se  $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$ . Dado que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 + l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.}),$$

concluimos que  $\text{r}(A) = 2$ . Como  $\dim \text{Im } f = 2$  e o espaço de chegada é  $\mathbb{R}^3$  ( $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ), concluimos que

$$\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$$

pelo que  $f$  não é sobrejectiva.

Pelo Teorema da Dimensão tem-se:

$$\begin{aligned}\dim \mathbb{R}^2 &= \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f \\ 2 &= \dim \operatorname{Nuc} f + 2 \\ \dim \operatorname{Nuc} f &= 0.\end{aligned}$$

Logo  $f$  é injectiva.

- (c) Atendamos ao seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3 \\
 \mathcal{B} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathcal{B}' & \xrightarrow{\mathbf{Q}} & b.c.\mathbb{R}^3 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & id_{\mathbb{R}^3} \circ f & \\
 & & & \mathbf{QA} & 
 \end{array}$$

Podemos então concluir que

$$B = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, b.c., \mathbb{R}^3) = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3} \circ f; \mathcal{B}, b.c., \mathbb{R}^3) = QA$$

onde  $Q$  é a matriz de mudança de base  $Q = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}', b.c., \mathbb{R}^3)$ .

Logo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. (a) O polinómio característico de  $A$  é dado por:

$$\begin{aligned} p_A(x) = \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 0 & 2 & 4-x \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{Lapl.} \\ c_1}}{=} (2-x)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = \\ &= (2-x)[(1-x)(4-x) + 2] = (2-x)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (2-x)^2(3-x). \end{aligned}$$

Como os valores próprios de  $A$  são os zeros do seu polinómio característico concluímos que os valores próprios de  $A$  são :

$$2, \quad \text{m.a.}(2) = 2 \quad \text{e} \quad 3, \quad \text{m.a.}(3) = 1.$$

(b) Por definição  $X = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  é um vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio 3 se  $X \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $AX = 3X$ . Tem-se  $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

donde concluímos o que pretendíamos.

(c) O subespaço próprio de  $A$  associado ao valor próprio 2 é dado por:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Ou seja, é o conjunto das soluções do sistema homogéneo  $(A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$ .

Determinemos então o conjunto das soluções deste sistema.

Cálculo auxiliar:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + 2l_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{-l_2 \\ -l_1}]{l_2 \leftrightarrow l_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 - l_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Assim podemos afirmar que

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : b = 0 \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Como  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  concluímos que  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  é uma base de  $M_2$  e, portanto,

$$\text{m.g.}(2) = \dim(M_2) = 1.$$

Alternativamente, como  $A$  tem ordem  $n = 3$  tem-se

$$\text{m.g.}(2) = n - r(A - 2I_3) = 3 - r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right).$$

Como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{linhas})} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tem-se  $r(A - 2I_3) = 2$  e, portanto,  $\text{m.g.}(2) = 3 - 2 = 1$ .

Tem-se

(d)  $A$  é diagonalizável se, e só se,  $\text{m.g.}(3) + \text{m.g.}(2) = 3 = \text{ordem de } A$ .

Como  $\text{m.a.}(3) = 1$  e  $1 \leq \text{m.g.}(3) \leq \text{m.a.}(3)$ , concluímos que  $\text{m.g.}(3) = 1$ .

Dado que, por (c) se tem  $\text{m.g.}(2) = 1$ , obtemos

$$\text{m.g.}(3) + \text{m.g.}(2) = 1 + 1 = 2 \neq 3.$$

Logo  $A$  não é diagonalizável.

11. (a) Por definição a matriz  $A$  é hemi-simétrica se  $A = -A^\top$ .

Neste caso, como  $A + A^\top = 4I_n$ , ter-se-ia  $-A^\top + A^\top = 4I_n$ , isto é,  $4I_n = 0_{n \times n}$  que é uma contradição.

Logo  $A$  não é hemi-simétrica.

(b) Por definição  $\alpha$  é valor próprio de  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  se existe  $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ , não nulo, tal que

$$AX = \alpha X.$$

A igualdade anterior é equivalente a cada uma das seguintes:

$$\begin{aligned} AX - 4X &= \alpha X - 4X \\ (A - 4I_n)X &= (\alpha - 4)X \\ -A^\top X &= (\alpha - 4)X \\ A^\top X &= (4 - \alpha)X \end{aligned}$$

e, portanto,  $\alpha$  é valor próprio de  $A$  se, e só se,  $4 - \alpha$  é valor próprio de  $A^\top$ .

(c) Se  $4$  é valor próprio de  $A$  então, atendendo a (b), tem-se que  $4 - 4 = 0$  é valor próprio de  $A^\top$ .

Como  $A$  e  $A^\top$  têm o mesmo polinómio característico e, consequentemente, os mesmos valores próprios, podemos afirmar que  $0$  é valor próprio de  $A$ .

Consequentemente,  $|A - 0I_n| = 0$ , isto é,  $|A| = 0$  e, portanto,  $A$  não é invertível.

Fim