

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				

Atenção

Os primeiros 7 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 7 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:
- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,5 valores;
 - Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 7) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 7 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 5}(\mathbb{R}) \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A matriz C não é hemi-simétrica.
- ☐ A matriz A está em forma de escada reduzida.
- ☐ As matrizes A e B são equivalentes por linhas.
- ☐ A forma de escada reduzida de C é I_3 .

2. Para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tem-se:

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
- ☐ $\alpha(A + B^\top)^\top = \alpha A^\top + \alpha B$.
- ☐ Se A e B são invertíveis então $A^{-1}B^\top$ é invertível e $(A^{-1}B^\top)^{-1} = A(B^{-1})^\top$.
- ☐ Se A e B são invertíveis então a matriz $3AB$ é invertível e $(3AB)^{-1} = \frac{1}{3}B^{-1}A^{-1}$.

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$, cuja

$$\text{matriz ampliada é equivalente por linhas à matriz } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b+2 & 3 \end{array} \right].$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $a = 1$ e $b \neq -5$ então o sistema é impossível.
- ☐ B Se $a \in \mathbb{R}$ e $b = -2$ então o sistema é impossível.
- ☐ C Se $a = 1$ e $b = -5$ então o conjunto das soluções do sistema é $\mathcal{C} = \{(4 - 2\alpha_2, \alpha_2, -1) : \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ D Se $a = 1$ e $b \neq -2$ então o sistema é possível determinado.
4. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $\det A \neq 0$ e $A \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} A_1 \xrightarrow{4l_1} A_2 \xrightarrow{l_1 + 5l_3} B$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\det B = -\frac{1}{4} \det A$.
- ☐ B A é invertível e AB é invertível.
- ☐ C $\det(2A^\top) = 2^n \det A$.
- ☐ D $\det A_2 = \det B$.
5. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis que verificam: $A \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} A_1 \xrightarrow{4l_2} A_2 \xrightarrow{l_1 + 5l_3} B$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A As matrizes A e B têm a mesma característica.
- ☐ B $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = A_2$.
- ☐ C B é equivalente por linhas a A .
- ☐ D $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_2 = B$.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A O complemento algébrico do elemento da posição $(1, 3)$ da matriz A é -2 .
- ☐ B $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 6 & 6 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- ☐ C A matriz A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{2} \text{adj } A$.
- ☐ D $A \text{adj } A = 2I_3$.

7. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ☐ B O conjunto $\mathcal{I} = \{a + bi \in \mathbb{C} : b = 0\}$ é um subespaço do espaço vectorial real $\mathbb{C}$.
- ☐ C Para $n \geq 2$, o conjunto das matrizes não invertíveis de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.
- ☐ D $\mathbb{R}_2[x]$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- [1.5] (a) Calcule o determinante de A por aplicação do Teorema de Laplace à linha 2 de A .
- [2.0] (b) Justifique que a matriz A é invertível e determine a sua inversa.
- [2.0] (c) Escreva A^{-1} como produto de matrizes elementares.
- [1.0] (d) Considere o sistema de equações lineares $AX = B$ nas incógnitas x, y, z sobre $\mathbb{R}$. Indique uma matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ tal que a sequência $(1, 0, -1)$ é solução do sistema $AX = B$.

Mude de Folha

9. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Consideremos a matriz $C = B^T AB$. Nesta conformidade, mostre que:

- [1.5] (a) $(\det C)(\det A) \geq 0$.
- [1.5] (b) Se $B^T B = I_n$ então $\det C = \det A$.

Fim

1. C
2. C
3. D
4. A
5. B
6. B
7. C
8. (a) Calculemos o determinante de A aplicando o Teorema de Laplace à linha 2 de A .

$$\det(A) \stackrel{\text{Lapl.}}{=} 3 \cdot \widehat{a}_{22} = 3 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1 + 2) = 3.$$

- (b) A matriz A é invertível se, e só se, $\det(A) \neq 0$ como $\det(A) = 3$ então A é invertível.

Determinemos a inversa da matriz A .

Tem-se:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 - l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 - l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + 2l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] = [I_3|A^{-1}].$$

Logo, a inversa de A é $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- (c) Atendendo à alínea anterior temos que

$$A \xrightarrow{l_3 - l_1} A_1 \xrightarrow{l_3 - l_2} A_2 \xrightarrow{l_1 + 2l_3} A_3 \xrightarrow{\frac{1}{3}l_2} I_3.$$

Consideremos as matrizes elementares E_1, E_2, E_3 e E_4 tais que:

$$I_3 \xrightarrow{l_3 - l_1} E_1, \text{ ou seja, } E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$I_3 \xrightarrow{l_3 - l_2} E_2, \text{ ou seja, } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$I_3 \xrightarrow{l_1 + 2l_3} E_3, \text{ ou seja, } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$I_3 \xrightarrow{\frac{1}{3}l_2} E_4, \text{ ou seja, } E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como efetuar uma transformação elementar T nas linhas de uma matriz corresponde a multiplicar a matriz, à esquerda, pela matriz elementar obtida, a partir da matriz identidade, efetuando a mesma transformação elementar T , podemos afirmar que $E_4 E_3 E_2 E_1 A = I_3$ e, portanto,

$$A^{-1} = E_4 E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (d) Considerando o sistema $AX = B$, sabemos que $(1, 0, -1)$ é solução se, e só se, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = B$.

Assim, efectuando a multiplicação de A por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ obteremos a matriz B :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = B.$$

9. Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, seja $C = B^T AB$.

- (a) Atendendo a que o determinante do produto de duas (ou mais) matrizes quadradas, da mesma ordem, é igual ao produto dos determinantes das matrizes em causa; então sai que

$$\det C = \det B^T \det A \det B = \det B \det A \det B = (\det B)^2 \det A.$$

Uma vez que $\det B^T = \det B$, do exposto resulta que

$$(\det C)(\det A) = (\det B)^2 \det A \det A = (\det B)^2 (\det A)^2 \geq 0.$$

- (b) Suponhamos que $B^T B = I_n$. Tendo presente que o determinante do produto de duas matrizes quadradas, da mesma ordem, é igual ao produto dos determinantes das duas matrizes em causa; então podemos concluir que

$$\det B^T \det B = \det (B^T B) = \det I_n = 1.$$

Por outro lado, atendendo a que $\det B^T = \det B$, do que acima foi exposto resulta

$$(\det B)^2 = \det B \det B = \det B^T \det B = 1.$$

Como já vimos que $\det C = (\det B)^2 \det A$ então temos

$$\det C = \det A.$$