

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				

Atenção

Os primeiros 7 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 7 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinala-a com um X na grelha de respostas.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 7) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 7 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ considere os subespaços:

$$F = \langle (1, 1, 1, 2), (0, 0, 0, 2) \rangle \quad \text{e} \quad G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \wedge w = 0\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $G = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$

☐ B $\dim(F + G) = 3$.

☐ C $(2, 3, 2, 4) \in F + G$.

☐ D $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

2. Considere as bases de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 2), (0, -1, 2), (0, 0, -1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((0, 0, 1), (1, -1, 4), (1, 0, 2))$.

Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = A$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A A sequência das coordenadas de $f(1, 0, 2)$ na base $\mathcal{B}_2$ é a coluna da matriz $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ B $\mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ C $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ D $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifica $f(x, y, z, w) = (x - y, z + w, 2z)$ para qualquer $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\text{Nuc } f = \{(y, y, 0, 0) : y \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ B A aplicação f não é injectiva.
- ☐ C $(1, 2, 3) \in \text{Im } f$.
- ☐ D $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$.

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ uma matriz cujo polinómio característico é $p_A(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A 2 é valor próprio de A .
- ☐ B Se $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio -3 então $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$.
- ☐ C A é invertível.
- ☐ D $\text{ma}(0) = 1$.

5. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tem os subespaços próprios $M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ b + 2c \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}$ e $M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$, associados aos valores próprios 3 e 0, respectivamente.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A multiplicidade geométrica do valor próprio 3 é 2.
- ☐ B A é diagonalizável.
- ☐ C Existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- ☐ D Existe uma matriz invertível $Q \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 2z = 0\}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $(1, 3, -2) \in F^\perp$.
- ☐ B $((-3, 1, 0), (2, 0, 1))$ é uma base de F e $(-3, 1, 0) \times (2, 0, 1) \notin F^\perp$.
- ☐ C $(-3, 1, 0) \mid (2, 0, 1) = -6$
- ☐ D O coseno do ângulo formado pelos vectores $u = (-3, 1, 0)$ e $v = (2, 0, 1)$ é $-\frac{6}{\sqrt{50}}$.

7. Considere a recta r de equação vectorial $(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(-3, 0, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e o plano π de equação geral $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A recta r é estritamente paralela ao plano π .
- ☐ B O ponto $(3, 1, -6)$ é um ponto da recta r .
- ☐ C A distância da recta r ao plano π é $\frac{4}{\sqrt{14}}$.
- ☐ D O plano π e o plano de equação geral $3x - y - 3z + 2 = 0$ formam um ângulo de $\frac{\pi}{2}$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

8. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por $f(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e considere $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

[1,5] (a) Determine $\mathcal{M}(f; b.c._{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B})$ onde $b.c._{\mathbb{R}^3}$ representa a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

[1,5] (b) Justifique que f é bijectiva.

Mude de Folha

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Determine o polinómio característico de A e justifique que 2 é valor próprio de A .

[2,0] (b) Determine o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2 e indique a multiplicidade geométrica do valor próprio 2.

Mude de Folha

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$. Mostre que:

[1,0] (a) Se X é um vector próprio de A então X é um vector próprio de $A - kI_n$.

[1,5] (b) Se $A^2 - 4A + 4I_n = 0$ então A tem apenas o valor próprio 2.

[1,0] (c) Se A é diagonalizável e $A^2 - 4A + 4I_n = 0$ então $A = 2I_n$.

Fim

1. D
2. C
3. D
4. C
5. D
6. B
7. C
8. (a) Para construir a matriz da aplicação linear f , comecemos por determinar a imagem de cada um dos vectores da base do espaço de partida ($b.c.\mathbb{R}^3$) e, em seguida, escrevamos cada uma das imagens como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$ do espaço de chegada:

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = 0(1, 1, 1) + 0(1, 1, 0) + 1(1, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 1, 0) = 0(1, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + 0(1, 0, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 1, 1) = 1(1, 1, 1) + 0(1, 1, 0) - 1(1, 0, 0)$$

Dispondo, por ordem e por coluna numa matriz, os coeficientes das combinações lineares obtidos anteriormente, temos:

$$\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- (b) A aplicação linear f é sobrejectiva se, e só se, $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$.

Uma vez que $\dim \operatorname{Im} f = r(\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, \mathcal{B}))$, calculemos a característica da matriz da aplicação linear:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.}).$$

Concluimos, assim que $r(\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, \mathcal{B})) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, logo f é sobrejectiva.

Como a dimensão do espaço de partida e a dimensão do espaço de chegada são iguais, temos que f é também injectiva e consequentemente, bijectiva.

Alternativamente, poder-se-ia determinar o $\operatorname{Nuc} f$. Verificando que $\operatorname{Nuc} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, podíamos afirmar que a aplicação f era injectiva e usando o argumento anterior, concluiríamos que f era também sobrejectiva e, portanto, bijectiva.

Poder-se-ia ainda determinar $\operatorname{Im} f$ atendendo a que $\operatorname{Im} f = \langle f(1, 1, 1), f(1, 1, 0), f(1, 0, 0) \rangle = \mathbb{R}^3$. Deste modo podíamos afirmar que f era sobrejectiva e usando o argumento anterior, concluiríamos que f era também injectiva e, portanto, bijectiva.

9. (a) O polinómio característico de A é dado por:

$$P_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 \\ -2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{Lapl.} \\ c_3}}{=} (2-x)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} = \\ = (2-x)((-x)(2-x) + 1) = (2-x)(-2x + x^2 + 1).$$

Como $p_A(2) = (2-2)(-2 \times 2 + 2^2 + 1) = 0$ concluímos que 2 é um zero do polinómio característico de A e, portanto, é um valor próprio de A .

- (b) O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2 é dado por:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Ou seja, é conjunto das soluções do sistema homogéneo $(A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$. Determinemos, então o conjunto das soluções deste sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 - 2l_1 \\ l_3 - 2l_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 - l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Assim podemos afirmar que

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Uma vez que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um único vector não nulo, então é linearmente independente. Desta forma podemos afirmar que $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_2 .

Logo $mg(2) = \dim(M_2) = 1$.

10. (a) Seja X é vector próprio de A então $X \neq 0$ e $AX = \alpha X$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dado que X é vector próprio de A , temos $(A - kI_n)X = AX - kI_n X = \alpha X - kX = (\alpha - k)X$.

Como $X \neq 0$, concluímos que X é vector próprio de A associado ao valor próprio $\alpha - k$.

- (b) Observemos que 2 é valor próprio de A se, e só se, $|A - 2I_n| = 0$.

Como

$$(A - 2I_n)^2 = A^2 - 2AI_n - 2I_n A + 4(I_n)^2 = A^2 - 4A + 4I_n = 0,$$

podemos afirmar que $|(A - 2I_n)^2| = 0$.

Assim, dado que

$$|(A - 2I_n)^2| = |(A - 2I_n)(A - 2I_n)| = |A - 2I_n||A - 2I_n| = 0,$$

podemos concluir que $|A - 2I_n| = 0$ e que, portanto, 2 é valor próprio de A .

Verifiquemos agora que 2 é o único valor próprio de A .

Suponhamos que α é um valor próprio de A e seja X um vector próprio de A associado ao valor próprio α .

Como $A^2 - 4A + 4I_n = 0$ então temos

$$(A^2 - 4A + 4I_n)X = 0 \Leftrightarrow \text{ (P. distributiva)}$$

$$A^2X - 4AX + 4I_nX = 0 \Leftrightarrow \text{ (X é vector próprio de A associado ao valor próprio } \alpha \text{)}$$

$$\alpha^2X - 4\alpha X + 4I_nX = 0 \Leftrightarrow \text{ (pondo o vector em evidência)}$$

$$(\alpha^2 - 4\alpha + 4)X = 0 \Rightarrow \text{ (porque X é vector próprio, logo } X \neq 0 \text{)}$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0.$$

Uma vez que $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 = 0$, concluímos que $\alpha = 2$ é a única solução da equação e, por isso, o único valor próprio de A .

(c) Pela alínea anterior, 2 é o único valor próprio de A .

Uma vez que, por hipótese, A é diagonalizável, então existe uma matriz invertível P tal que A é semelhante a uma matriz diagonal D , isto é, $P^{-1}AP = D$. Os elementos da diagonal principal de D são os valores próprios de A .

Como 2 é o único valor próprio de A , todos os elementos da diagonal principal de D são iguais a 2 então $D = 2I_n$.

Assim, $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow PP^{-1}APP^{-1} = P2I_nP^{-1} \Leftrightarrow A = 2I_n$.