

ANÁLISE MATEMÁTICA I

1º semestre de 2016/2017

Ficha 1 - Noções Topológicas

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x-3|}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \right\} \quad \text{e} \quad B =]-\infty, 2] \cup \{4\}.$$

- (a) Exprima o conjunto A como união de intervalos.
- (b) Determine o interior, a fronteira e o derivado do conjunto B e a aderência de $A \cup B$.
- (c) Averigúe se o conjunto B é fechado e/ou aberto. Justifique.

2. Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\log(x^2)}{|x^2 - 4|} \geq 0 \right\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 1\}.$$

- (a) Exprima A e B como união de intervalos.
- (b) Determine o interior de $A \cup B$, os minorantes de $A \cap B$ e os pontos de acumulação de B .

3. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$A = [-\pi, -1] \cup [e, 10] \cup \{0\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \frac{7}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (a) Determine o interior, a fronteira e o derivado do conjunto A .
- (b) Averigúe se o conjunto A é aberto ou fechado. Justifique.
- (c) Determine a fronteira, o derivado e a aderência de $A \cup B$.
- (d) Determine o conjunto dos minorantes e o conjunto dos majorantes de $A \cup B$.
- (e) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cup B$.

4. Considere os conjuntos A e B definidos por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2 - |-4x + 6|}{\log^2(x^2 - 1)} \geq 0 \right\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |\sqrt{2}x| \leq \sqrt{6}\}.$$

- (a) Apresentando todos os cálculos, escreva $A \cap B$ como união de intervalos.
- (b) Determine, justificando, o conjunto dos pontos fronteiros de $A \cap B$. Averigúe se o conjunto $A \cap B$ é fechado.

5. Seja D o domínio da função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{2-x^2} \cdot \log(x+1)}{\sin(x)}.$$

Seja A o conjunto dos termos da sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$.

- Apresentando todos os cálculos, escreva D como união de intervalos.
- Determine, justificando, o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cup D$. Averigüe se o conjunto $A \cup D$ é aberto ou fechado.

6. Seja D o domínio da função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. Determine o interior e a fronteira do conjunto

$$D \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

7. Considere o conjunto D definido por

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(3-x^2)(5-x^2)}{|x-2|} \leq 0 \right\}$$

- Mostre que $D = [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2[\cup]2, \sqrt{5}]$.
- Determine o interior, fronteira e derivado do conjunto D .

8. Seja D o domínio da função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{x}{\log(4-x^2)}$. Determine o interior e a fronteira do conjunto

$$D \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

9. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{1-|x|} > 0 \right\}$$

e

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{6n}{2n^2+1}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- Apresentando todos os cálculos, escreva A como união de intervalos.
- Determine o conjunto dos majorantes e os pontos de acumulação de $A \cup B$.

10. Considere o conjunto A definido por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\log(x)}{x-4} > 0 \right\}.$$

Seja B o domínio da função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{\sqrt[4]{e^2 - e^{6x^2-1}}}{-x^3 + 2x^2 - 4x}$.

- (a) Exprima A e B como uniões de intervalos.
- (b) Determine o interior de $A \cup B$, os minorantes de $A \cap B$ e os pontos de acumulação de B .
- (c) Seja (a_n) uma sucessão convergente de termos em B . É verdadeira ou falsa a proposição “O limite da sucessão (a_n) pertence a B ”?

11. Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} < 0 \right\}$$

e

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (a) Apresentando todos os cálculos, mostre que $A =]-\infty, 1[\cup]2, 3[$.
- (b) Determine a fronteira de $A \cup B$.
- (c) Indique, justificando, se $B \cup \{2\}$ é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.
- (d) Seja $X \subset \mathbb{R}$. Das seguintes afirmações indique as que são verdadeiras e as que são falsas. Para as afirmações que considerar falsas construa e apresente um exemplo para corroborar a sua classificação.
 - i) Se x é ponto interior de X então x é ponto de acumulação de X ;
 - ii) Se x é ponto isolado de X então x é ponto fronteiro de X ;
 - iii) A intersecção do conjunto X' com $\text{fr}(X)$ é um conjunto vazio.