

ANÁLISE MATEMÁTICA I

1º semestre de 2016/2017

Ficha 2 - Indução Matemática

1. Prove, usando o Método de Indução, que as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$(a) \sum_{k=1}^n (a + 4k) = 2n^2 + n(a + 2), \quad a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n + 1)! - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$(c) \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{3^k} - \frac{k-1}{3^{k-1}} \right) = n 3^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Prove, usando o Método de Indução, as seguintes afirmações:

$$(a) 3n^2 + 3n \text{ é múltiplo de } 6, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$(b) 6^n - 1 \text{ é múltiplo de } 5, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$(c) 4^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Prove, usando o Método de Indução, que as seguintes desigualdades são verdadeiras:

$$(a) 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\};$$

$$(b) 1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Considere a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Utilizando o Princípio de Indução Matemática mostre que

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

5. Considere a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + n - 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Utilizando o Princípio de Indução Matemática mostre que

$$u_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

6. Considere a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Utilizando o Princípio de Indução Matemática, mostre que

$$u_n = 7 \times 2^{n-1} - 6, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

7. Dada a sucessão (v_n) definida por

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n + 3}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Prove, por indução matemática, que $v_n < \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que a sucessão é crescente.

8. Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Prove, por indução matemática, que $u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Prove que a sucessão é monótona.

9. Seja (u_n) a sucessão de números reais

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - 2u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Prove, usando o Princípio da Indução Matemática que $u_n = \frac{1}{1 - 2n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

10. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x)$. Mostre, usando o Princípio de indução, que

$$f^{(n)}(x) = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

11. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = (x - 1) \log(x) - x$. Prove, usando o Princípio de indução, que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(\frac{(n-2)!}{x^{n-1}} + \frac{(n-1)!}{x^n} \right), \quad \forall n \geq 2.$$

12. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = xe^{2x}$. Usando o Princípio de Indução Matemática, prove que

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}e^{2x}(n + 2x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$