

ANÁLISE MATEMÁTICA I

1º semestre de 2016/2017

Ficha 3 - Sucessões de números reais

1. Calcule, caso exista, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

- (a) $n(1 + (-1)^n)$;
- (b) $n^4 - (-1)^n n^2$;
- (c) $\log(n^2 + 1) - e^{n+1} + n^{100}$.

2. Calcule, se existir, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

- (a) $\frac{1 - n}{5n + 3}$;
- (b) $\frac{n^2 + 2}{3n + 1}$;
- (c) $\frac{3n}{4n^3 + 1}$;
- (d) $\frac{-n^3 + 2}{4n^3 - 7}$.

3. Calcule, justificando, os limites das seguintes sucessões:

- (a) $\frac{\sqrt{n+1}(1 + 2\sqrt{n})}{n + \sqrt[3]{n}}$;
- (b) $\frac{n((-1)^n + \sqrt{n})}{2 + \sqrt{n^3 + 1}}$;
- (c) $\frac{n\sqrt[3]{n^2 + 2}}{n^2 + (-1)^n n}$;
- (d) $\frac{2n \cdot e^{1/n}}{(-1)^n + \sqrt{n^2 + 5}}$.

4. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{2^{2n+1} + 2^n}$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n} + 5^n}{8^n + 1}$;
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^{2n+1} + 2^n}$;
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{n+1} + (-7)^n}{3^{n-2} + 5^{n+1}}$.

5. Calcule, justificando, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

- (a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
- (b) $\frac{2n+1}{n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})}$;
- (c) $\sqrt{\log(n^2+1)} - \sqrt{\log(n^2)}$.

6. Calcule o limite de cada uma das seguintes sucessões:

- (a) $\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n}$;
- (b) $\left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^n$;
- (c) $\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^n$;
- (d) $n \log\left(1 + \frac{5}{n^5}\right)$;
- (e) $\left(1 + \frac{1}{\log(n)}\right)^n$;
- (f) $\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n$;
- (g) $\left(\frac{n^6-2}{n^6}\right)^{n^3+3}$;
- (h) $\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}$.

7. Calcule, justificando, os seguintes limites

- (a) $\lim_{i=1}^{n+1} \frac{3}{\sqrt{9n^2+2i}}$;
- (b) $\lim_{k=0}^{3n} \frac{n}{\sqrt{4n^2+k}}$;
- (c) $\lim_{k=1}^{2n+3} \frac{2n+1}{\sqrt{n^4+k}}$;
- (d) $\lim_{k=3}^{n^2+1} \frac{\text{sen}(n^2+1)}{n^3-2k}$;
- (e) $\lim_{k=1}^n \frac{n + \cos(k\pi)}{3n^2+k}$.

8. Calcule, justificando, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

- (a) $\frac{n \cos^2(\alpha n)}{n^4 + 1}$;
- (b) $\frac{n \operatorname{sen}(n)}{2^n \sqrt{5n^3 + 1}}$;
- (c) $\frac{n^2 + 3}{n\sqrt{n^3 + 2}} \cdot \cos(\sqrt{n^3 + 2})$;
- (d) $n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$;
- (e) $\left(\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} - \frac{n}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$;
- (f) $\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$;
- (g) $\frac{1}{2n+2} \sqrt[n]{(2n+2)!}$;
- (h) $\sqrt[n]{\frac{n^2 \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}}$;
- (i) $\sqrt[n]{(n+1)! - n!}$;
- (j) $\sqrt[n]{n! \left(\frac{2}{n}\right)^n}$.

9. Indique, se existirem, o supremo e o ínfimo do conjunto dos termos das sucessões:

- (a) $\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$;
- (b) $\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$.

10. Determine os limites superiores e inferiores das sucessões de termos gerais

- (a) $\frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{10}\right) + \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n$;
- (b) $\frac{(-1)^n n^2 + 3}{n+1}$;
- (c) $\frac{((-1)^{n+3} - (-1)^n) n^3 + 2}{3n+1}$.

11. Considere a sucessão (v_n) definida por

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n + 3}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Sabendo que $v_n < \frac{3}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e que é uma sucessão crescente, conclua que (v_n) é convergente e calcule o seu limite.

12. Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Sabendo que $u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$, e que é uma sucessão monótona, justifique que (u_n) é convergente e calcule o seu limite.

13. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n}, & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{n}{n+1}, & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

- (a) Estude a monotonia de (a_n) .
- (b) Verifique se a sucessão é limitada e, em caso afirmativo, indique um majorante e um minorante.
- (c) Estude a convergência de (a_n) .