

ANÁLISE MATEMÁTICA I

1º semestre de 2016/2017

Ficha 4 - Funções Reais de Variável Real: Limites e Continuidade

1. Determine, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{|x-1|};$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x \cos(x)};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x - \sqrt{x}};$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 2^{x+1}}{6^{x-1} + e^x}.$

2. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } 1 \leq x < 5 \\ \frac{1}{5}x^2 - 2, & \text{se } x \geq 5. \end{cases}$$

Estude a continuidade de f no seu domínio.

3. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}, & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Estude a continuidade de f no seu domínio.

4. Seja $h : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3 \arcsen(x-3)}{x^2 - 9}, & \text{se } x > 3 \\ e^{1 - \log[(x-1) \cdot e]}, & \text{se } x \leq 3. \end{cases}$$

(a) Verifique que $D =]1, 4]$.

(b) Sabendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x)}{x} = 1$, mostre que h é contínua em D .

5. Seja f a função real de variável real, contínua no ponto $x = 1$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 1), & \text{se } x < 0 \\ a \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante a ;
- (b) Estude a continuidade de f nos restantes pontos de $\mathbb{R}$.

6. Mostre que a equação $\sin^3(x) + x \cos(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]0, \pi[$.

7. Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), & \text{se } x \leq \frac{\pi}{6} \\ \frac{6x}{\pi}, & \text{se } x > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

- (a) Estude a continuidade em $\mathbb{R}$.
- (b) Utilize o Teorema de Bolzano para provar que existem zeros da função no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e determine-os.
- (c) Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{g(x)}{x}$.

8. Considere a função real de variável real definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x + \arccos(x), & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1, \\ \frac{x+5}{3}, & \text{se } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

- (a) Mostre que h é contínua em todo o seu domínio.
- (b) Aplicando o Teorema de Bolzano, mostre que: $\exists c \in]2, 4[: h(c) = c$.

9. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2a, & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{x(x-2)}{x^2 - 5x + 6}, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

- (a) Determine o valor de a de forma que f seja contínua em $x = 2$.
- (b) Mostre que apesar de se ter $f(2) \cdot f(4) < 0$, não se pode aplicar o teorema do valor intermédio de Bolzano no intervalo $[2, 4]$.

10. Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$. Mostre que os gráficos de f e g se intersectam num ponto de abcissa $c \in]a, b[$.

11. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x > 2 \\ \frac{2}{x} + 2, & \text{se } x \leq 2. \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é contínua no seu domínio.
- (b) Indique o máximo e o mínimo de f no intervalo $[1, 3]$.

12. Seja $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no seu domínio.

- (a) Mostre que a função $f(x) = g(1 - x^2)$ tem máximo e mínimo.
- (b) Se considerássemos g definida em $]0, +\infty[$, poderíamos continuar a garantir para f a existência de máximo e mínimo? Justifique.

13. Seja f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -e^{1/x}, & \text{se } x < 0 \\ \log\left(\frac{1}{1+x^2}\right), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (b) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.
- (c) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

14. Considere a função real $f(x) = 1 - x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Seja g um prolongamento de f a $\mathbb{R}$. Determine o valor a atribuir a $g(0)$ de modo que g seja contínua em $x = 0$.

15. Verifique se a função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{x^3 - x}, & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

tem uma descontinuidade removível em $x = 1$. Qual o valor a atribuir a a de modo que a função g definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq 1 \\ a, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

seja contínua no seu domínio?