FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

ANÁLISE MATEMÁTICA I
1º semestre de 2016/2017

Ficha 5 - Funções Reais de Variável Real
Diferenciabilidade

1. Calcule a derivada de f nos pontos a indicados.

   (a) $f(x) = x\,e^{-x^2}$, $a = 0$;

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg}(x)}$, $a = \dfrac{\pi}{4}$;

   (c) $f(x) = \begin{cases} 1 - \log(x^3 + 2x), & \text{se } x > 0 \\ x + \dfrac{1}{x+1}, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$ $\quad a = 0,\ a = 1,\ a = -2.$

   (d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 3}, & \text{se } x \leq 1, \end{cases}$ $\quad a = 1,\ a = 2.$

2. Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função f nos pontos $\big(a, f(a)\big)$ sendo:

   (a) $f(x) = \log\big(\log(x)\big)$, $a = e$;

   (b) $f(x) = \begin{cases} -e^{1/x}, & \text{se } x < 0 \\ \log\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right), & \text{se } x > 0, \end{cases}$ $\quad a = -1;$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$ $\quad a = 0.$

3. Caracterize a função derivada de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \log(1 - x^2), & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{2}x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} -\pi - 1 - x, & \text{se } x \leq -\pi \\ \cos(x), & \text{se } -\pi < x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}(x^2 - 1), & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{3}{x} - 3x^3, & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -x^2\, e^{1-x}, & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{x^2-4}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{x+3}, & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-1}, & \text{se } x \geq -2 \\ e^{|x+3|} & \text{se } x < -2. \end{cases}$

4. Sejam f uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}$ e g a função real de variável real definida por $g(x) = f(\operatorname{arctg}(x))$. Mostre que
$$4\, g''(1) = f''\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2f'\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

5. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e g uma função definida por $g(x) = f(e^x)$.
   (a) Defina a função derivada de g.
   (b) Supondo que f' também é diferenciável, determine $g''(1)$.

6. Sendo $f(x) = x^4$, g uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e h tal que $h(x) = (g \circ f)(\operatorname{sen}(x))$, defina a função derivada de h.

7. Seja f uma função diferenciável e injectiva em $\mathbb{R}$ e $g(x) = x^3$. Aplicando as regras da derivação da função inversa e da função composta, determine uma expressão para a função derivada de $(f \circ g)^{-1}$.