

ANÁLISE MATEMÁTICA I

1º semestre de 2016/2017

Ficha 11 - Funções Reais de Variável Real
Integrais de Riemann.

1. Calcule o valor dos seguintes integrais:

(a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^4 + x^6 + 1}{x^2} dx;$

(e) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6-x^2}} dx;$

(b) $\int_0^1 e^{e^x+x} dx;$

(f) $\int_0^1 (x^{3/5} - 8x^{5/3}) dx;$

(c) $\int_{-2}^3 (3x + |x^2 - 4x - 5|) dx;$

(g) $\int_{-4}^{-3} \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t}} dt;$

(d) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x}{(x^2+1)\log(\sqrt{x^2+1})} dx;$

(h) $\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \left(\pi^2 x + \frac{2 \arctg(x)}{1+x^2} \right) dx.$

2. Calcule, usando integração por partes, os seguintes integrais:

(a) $\int_{-\pi}^{\pi/2} |x \cos(x)| dx;$

(c) $\int_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{x^3}{\cos^2(x^2)} dx;$

(b) $\int_1^e \log^2(x) dx;$

(d) $\int_0^{\pi/4} (2x+1) \cos(4x) dx.$

3. Calcule, usando uma substituição conveniente, os seguintes integrais:

(a) $\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx;$

(d) $\int_0^{\pi/6} \frac{5 \sin(x) \cos(x)}{1-2 \cos^2(x)} dx;$

(b) $\int_{\log(2)}^{\log(2\sqrt{3})} \frac{7e^x + 8}{(e^{2x} + 4)(e^x - 1)} dx;$

(e) $\int_1^e \frac{7}{x(\log^2(x) + 3)(\log(x) - 2)} dx;$

(c) $\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx;$

(f) $\int_{-1/2}^0 \frac{u + \sqrt{2u+1}}{1 + 2\sqrt{2u+1}} du.$

4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \frac{2x \log(x)}{(1+x^2)^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua no seu domínio.

(b) Calcule F , primitiva de f , tal que $F(0) = 1$.

(c) Calcule $\int_0^1 f(x) dx$.

5. Seja $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$G(x) = (x^2 + 1) \int_{-1}^{x^2} f(t) dt$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que $G''(1) - G'(1) = 8(f'(1) + f(1))$.

(b) Sabendo que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $G(a) = 0$ mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$.

6. Seja H a função real de variável real definida por

$$H(x) = \int_1^{e^x - e} \frac{1}{t^2} \log(t) dt.$$

(a) Indique o domínio de H .

(b) Determine a expressão analítica da derivada da função H .

7. Seja F a função real de variável real definida por $F(x) = \int_1^{4x^2-1} \sqrt{t} (t+2) dt$.

(a) Indique o domínio de F .

(b) Determine a expressão analítica da derivada da função F .

(c) Estude a existência de extremos de F .

8. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3) dt}{x^4}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{3t^2 + 5} dt$.

9. Considere a função $f(x) = \int_1^x t^2 \log(t) dt$.

(a) Determine o domínio de f .

(b) Escreva a fórmula de Taylor de f , com resto de ordem 3, em torno do ponto 1.

(c) Use a alínea b) para calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

10. Determine o valor da área do domínio limitado pelas rectas $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = \pi$ e $y = 0$, e pela representação gráfica da função $f(x) = \cos(2x) + 1$.

11. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^{3/2}}$. Calcule a área do domínio plano limitado pelo gráfico da função f e pela recta $y = 0$, no intervalo $[-1, 5]$.
12. Calcule a área do domínio plano limitado pelas representações gráficas das funções $g(x) = e^x$ e $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[-1, 2]$;
13. Calcule a área do domínio plano limitado pelas representações gráficas das funções $y = \frac{\log(x)}{x^2}$ e $y = \frac{1}{x^2}$ no semiplano $x \geq 1$.
14. Determine o valor da área do domínio limitado pelas representações gráficas das funções:
- (a) $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e $y = x^2 - 4x$;
 - (b) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ e $y = \frac{x^2}{2}$;
 - (c) $y = -x^4 + 2x^2 + 5$ e $y = -x^2 + 2x + 5$;
 - (d) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y = x^2 - 1$;
 - (e) $y = x^3 - x$ e $y = \sin(\pi x)$;
 - (f) $y = |x - 1| - 3$ e $y = -x^2 + 2x + 2$.
15. Calcule a área da porção da elipse de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, exterior à elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
16. Os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = cx^3$, onde $c > 0$, intersectam-se nos pontos $(0, 0)$ e $(\frac{1}{c}, \frac{1}{c^2})$. Determine o valor da constante real c de modo que a região limitada pelos gráficos de f e de g (no intervalo $[0, \frac{1}{c}]$) tenha área igual a $\frac{1}{2}$.