FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

ANÁLISE MATEMÁTICA I
1º semestre de 2016/2017

Ficha 12 - Funções Reais de Variável Real
Integrais Impróprios.

1. Calcule, se existir, o valor de cada um dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2}\, dx;$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\, dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)\,(x+1)}\, dx;$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{(x^2-4)^{6/5}}\, dx;$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(3\,t)}{2\,t^2}\, dt;$

(f) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx;$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}\, dt;$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} 2\,x^3\,(x^4+1)^{-3/2}\, dx;$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t}\, dt;$

(j) $\displaystyle\int_{a/2}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx,\ a\in\mathbb{R}^+;$

(k) $\displaystyle\int_0^{3\,a} \frac{2x}{(x^2-a^2)^{2/3}}\, dx,\ a\in\mathbb{R}^+;$

(l) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}\, dx;$

(m) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos(x)}\, dx;$

(n) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}\, dx;$

(o) $\displaystyle\int_0^{e^{\sqrt{6}}} \frac{1}{x(2+\log^2(x))}\, dx;$

(p) $\displaystyle\int_2^{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}\, dx;$

(q) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x^2-1}\, dx.$

2. Estude quanto à convergência os seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,t+3}{4\,t^3+1}\, dt;$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\,\sqrt{1+x^2}}\, dx;$

(c) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\, dx;$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1/2} x^5\, e^{x^6}\, dx;$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{5x^3+4x^2+3}\, dx;$

(f) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2-1}\, dx;$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(t)}{t^2}\, dt;$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2-1)^{1/3}\,(x+1)^{1/3}}\, dx;$

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx;$

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt{x^5+1}}\, dx;$

(k) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\, dx;$

(l) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{e^x}{x^3\,(1-x)^{1/5}}\, dx;$

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(\cos(x))^3}}\,dx;$

(n) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{x-1}\ \sqrt[4]{9-x^2}}\,dx;$

(o) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log(x+1)}{x-1}\,dx;$

(p) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(\operatorname{sen}(x))^{1/3}}\,dx;$

(q) $\displaystyle\int_3^{\pi} \frac{x}{(x^2-9)^{1/4}}\,dx;$

(r) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log(x^2+1)}{x^3}\,dx;$

(s) $\displaystyle\int_0^{7} \frac{1}{\sqrt{7x-x^2}}\,dx;$

(t) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}\,dx;$

(u) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^3-1}}\,dx;$

3. Calcule o valor da constante C de modo que o seguinte integral impróprio seja convergente:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3\,x+1}\right) dx$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to]0,\pi[$ uma função tal que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente. Estude a natureza do integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(f(x))\,dx$.

5. Determine uma representação analítica da função $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$ onde

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}, & \text{se } |x| \geq 1 \\ 2, & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

6. Considere a função $H :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \displaystyle\int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

(a) Estude a monotonia de H no seu domínio.

(b) É finito ou infinito o $\lim\limits_{x\to 0^+} H(x)$? E $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$?

(c) Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{H(x)}{\log(x)}$.

7. Determine, se existir, a área dos seguintes domínios planos ilimitados:

(a) Domínio determinado pelo eixo dos xx, pela parábola $y = x^2$ e pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$;

(b) Domínio determinado pelo eixo dos xx e pelo gráfico de $y = e^x$, no semiplano $x \leq 1$;

(c) Domínio definido pelo gráfico da função $y = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ e pelo eixo dos xx;

(d) Domínio definido pelos gráficos das funções $y = \log(x)$, $y = -\log(x)$, no semiplano $x \leq 1$;

(e) Domínio situado entre o gráfico da função $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-9x^2}}$ e a recta $y = 0$;

(f) Domínio situado entre o gráfico da função $y = \dfrac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{1+x^2}$ e a recta $y = 0$;

(g) Domínio definido pela função $y = (1-x)e^{-x}$ e pela recta $y = 0$, no semiplano $x \geq 0$;

(h) Domínio definido pela função $y = \dfrac{2x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ e pela recta $y = 0$;

(i) Domínio situado entre a recta $y = 0$ e o gráfico da função $y = e^{-|x|}$;

(j) Domínio definido pelo gráfico da função real de variável real $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ e pela recta $y = x + 1$ no semiplano $x \leq 3$;

(k) a imagem das funções $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ e $y = \dfrac{1}{2}\, x^2$ e pelo semi-eixo positivo dos xx.