Análise Matemática I D

Resolução da Repetição do 1º Teste — 20 de Junho de 2011

Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

1. Considere a função $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$. Determine o valor da área compreendida entre o gráfico da função f, o eixo dos xx e as rectas $x = 2$ e $x = -1$.

   Resposta:

   Como $\mathrm{e}^{x^2} > 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, o sinal da função f depende apenas do sinal de x. Assim, o gráfico de f está acima do eixo dos xx quando $x > 0$ e abaixo do eixo dos xx, se $x < 0$.

   A área pretendida corresponde ao valor do integral:

$$\int_{-1}^{2} \left| x\,\mathrm{e}^{x^2} - 0 \right| dx = \int_{-1}^{0} -x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx + \int_{0}^{2} x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \left[-\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2} \right]_{0}^{2}$$
$$= \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{e}) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^4 - 1) = \frac{e^4}{2} + \frac{e}{2} - 1.$$

2. Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \int_{1}^{\frac{1}{x-2}} \frac{t+2}{\operatorname{arctg} t}\,dt.$$

   a) Determine o domínio de g.

   b) Verifique se existem pontos em que a recta tangente ao gráfico da função é horizontal.

   Resposta:

   (a) Para que o integral próprio esteja bem definido, os extremos de integração deverão estar bem definidos e a função integranda deverá estar bem definida no domínio de integração considerado. Assim, $x - 2 \neq 0$ e $\operatorname{arctg} t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0$. A variável de integração, t, toma valores nos intervalos:

$$\left[1, \frac{1}{x-2}\right], \text{ se } \frac{1}{x-2} \geq 1$$

   ou

$$\left[\frac{1}{x-2}, 1\right], \text{ se } \frac{1}{x-2} \leq 1.$$

   A condição $\frac{1}{x-2} \geq 1$ é equivalente a $x \in]2, 3]$, pelo que $\frac{1}{x-2} \leq 1$ é equivalente a $x \in]-\infty, 2[\cup [3, +\infty[$.

   Analisando os intervalos de integração verificamos que $0 \notin [1, \frac{1}{x-2}]$. Para que $0 \notin [\frac{1}{x-2}, 1]$ é necessário e suficiente que $x > 2$.

   Assim o domínio de g será dado pelo conjunto $D =]2, 3] \cup [3, +\infty[=]2, +\infty[$.

(b) O declive da recta tangente ao gráfico de uma função num dado ponto x é dado por $g'(x)$. Como pretendemos que a recta tangente seja horizontal, pretendemos determinar os pontos x tais que $g'(x) = 0$. Comecemos por determinar a derivada de g recorrendo ao Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

Atendendo à continuidade da função integranda no domínio de integração considerado, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que

$$\left(\int_1^x \frac{t+2}{\operatorname{arctg}(t)}dt\right)' = \frac{x+2}{\operatorname{arctg}(x)}.$$

Por sua vez, o Teorema de Derivação da Função Composta garante que

$$\left(\int_1^{\frac{1}{x-2}} \frac{t+2}{\operatorname{arctg}(t)}dt\right)' = \frac{\frac{1}{x-2}+2}{\operatorname{arctg}(\frac{1}{x-2})}\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x-3}{(x-2)^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right)} = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Como $x = 3/2$ não pertence ao domínio da função g (o conjunto $D =]2, +\infty[$) conclui-se que não existem pontos em que a recta tangente ao gráfico da função seja horizontal.

3. Classifique, quanto à convergência, o integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\log x\, dx.$$

Resposta:
Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}\log x$. Tem-se que $D_f =]0, +\infty[$ e f é uma função contínua no seu domínio (trata-se do produto da função x^{-2} que é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pela função logaritmo que é contínua em $]0, +\infty[$). Como o intervalo de integração $[1, +\infty[\subset]0, +\infty[$, podemos concluir que f é contínua naquele intervalo. Assim, o integral impróprio é de 1ª espécie, porque o intervalo de integração é ilimitado e a função integranda é contínua neste intervalo.

Por outro lado, $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [1, +\infty[$. Estamos então nas condições de poder usar um critério de comparação, para determinar a natureza do integral impróprio. Vamos compará-lo usando um integral impróprio de 1ª espécie do tipo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$, para algum $p \in \mathbb{R}$. Sabemos que este converge se e só se $p > 1$. Calculemos o seguinte limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\log x}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ é convergente, podemos concluir que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\log x\, dx$ também é convergente e, sendo a função integranda não negativa do domínio de integração considerado, a convergência é absoluta.

4. Seja (u_n) a sucessão definida pela seguinte expressão de recorrência

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{(u_n-1)^2}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Prove que $u_n \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) não é convergente (Sugestão: Suponha que (u_n) é convergente e calcule o seu limite, utilizando a expressão de recorrência).

c) Atendendo às alíneas anteriores, pode fazer alguma afirmação relativa à monotonia da sucessão?

Resposta:

a) Vamos usar o Método de Indução Matemática para provar que $u_n \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Se $n = 1$, é imediato pela definição da sucessão que $u_1 = 4 \geq 4$.

- Seja $n > 1$ arbitrário e fixo.
  Hipótese de indução: $u_n \geq 4$.
  Tese de indução: $u_{n+1} \geq 4$

  Prova da Tese: Por hipótese de indução $u_n \geq 4$, mas esta condição é equivalente às seguintes:

$$\begin{aligned} u_n \geq 4 &\Leftrightarrow u_n - 1 \geq 3 \Leftrightarrow (u_n-1)^2 \geq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} \geq \frac{9}{2} \end{aligned}$$

  Como $9/2 > 4$, temos $u_{n+1} \geq 4$, como se queria provar.

b) Vamos usar a sugestão para provar que (u_n) não é convergente. Suponhamos que (u_n) era convergente e seja $a \in \mathbb{R}$ o seu limite. Como pela alínea (a) $u_n \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $a \geq 4$.
Por outro lado, pela definição de limite a sucessão (u_{n+1}) também tem limite a. Se usarmos a igualdade $u_{n+1} = \frac{(u_n-1)^2}{2}$ obtemos que

$$a = \lim \frac{(u_n-1)^2}{2} = \frac{(\lim u_n - 1)^2}{2} = \frac{(a-1)^2}{2},$$

o que equivale à resolução da equação $a^2 - 4a + 1 = 0$ que apresenta como soluções $a = 2 + \sqrt{3}$ ou $a = 2 - \sqrt{3}$. Ambas as soluções são inferiores a 4, o que é absurdo pois já tínhamos visto que $a \geq 4$. Logo (u_n) não pode ser convergente.

c) Das alíneas anteriores nada se pode afirmar acerca da monotonia da sucessão. Contudo, podemos ter a certeza que (u_n) não é decrescente. Se fosse, (u_n) seria limitada. De facto seria constante, igual a 4 (usando a alínea (a)). Assim teríamos (u_n) monótona e limitada e logo convergente, o que não é verdade pela alínea (b).

5.

a) Calcule $\int_0^1 \mathrm{e}^x \cos(3x+2)\,dx$.

b) Indique a primitiva de $\frac{\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}}$ que toma o valor 3 quando $x = \frac{2}{3}$ (Considere a substituição $\sqrt{x} = t$).

Resposta:

a) Comecemos por primitivar por partes a função $e^x \cos(3x+2)$.
Temos:

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos(3x+2)dx &= e^x \cos(3x+2) - \int e^x(-3\sin(3x+2))dx \\
&= e^x \cos(3x+2) + 3\int e^x \sin(3x+2)dx \\
&= e^x \cos(3x+2) + 3(e^x \sin(3x+2) - \int e^x 3\cos(3x+2)dx \\
&= e^x \cos(3x+2) + 3e^x \sin(3x+2) - 9\int e^x \cos(3x+2)dx
\end{aligned}$$

Então vem que:

$$10\int e^x \cos(3x+2)dx = e^x \cos(3x+2) + 3e^x \sin(3x+2),$$

ou ainda que

$$\int e^x \cos(3x+2)dx = \frac{1}{10}e^x \cos(3x+2) + \frac{3}{10}e^x \sin(3x+2) + c,$$

onde c é uma constante real.
Assim sendo, pela Regra de Barrow vem:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x \cos(3x+2)dx &= [\tfrac{1}{10}e^x \cos(3x+2) + \tfrac{3}{10}e^x \sin(3x+2)]_0^1 \\
&= \tfrac{1}{10}e\cos(5) + \tfrac{3}{10}e\sin(5) - \tfrac{1}{10}\cos(2) - \tfrac{3}{10}\sin(2).
\end{aligned}$$

b) Consideremos a substituição $\sqrt{x} = t$. Então vem $x = t^2$ e assim temos $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 2t$.
Então pelo método de primitivação por substituição vem

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{t+2}{3t^3+2t}2t\,dt = \int \frac{2t+4}{3t^2+2}dt = \\
&= \int \frac{2t}{3t^2+2}dt + \int \frac{4}{3t^2+2}dt \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{6t}{3t^2+2}dt + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)^2}dt \\
&= \frac{1}{3}\log(3t^2+2) + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right) + c \\
&= \frac{1}{3}\log(3x+2) + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + c,
\end{aligned}$$

com c uma constante real.

Para obtermos a primitiva pretendida substituímos x por $\frac{2}{3}$ na última expressão obtida e igualamos a 3. Temos então

$$\frac{1}{3}\log(4) + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\text{arctg}(1) + c = 3$$

ou seja vem

$$c = 3 - \frac{1}{3}\log(4) - \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{2}.$$