

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Repetição do 1º Teste — 26 de Junho de 2012

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 2 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,3 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

Considere a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é par} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Seja X o conjunto formado pelos termos de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Qual dos seguintes conjuntos corresponde à fronteira de X ?

- | | |
|---------------------------------|--|
| (a) $\text{fr}(X) = \{e\}.$ | (c) $\text{fr}(X) = X \cup \{e\}.$ |
| (b) $\text{fr}(X) = \emptyset.$ | (d) $\text{fr}(X) = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{e\}.$ |

2. Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

- | | |
|--|--------------------------------|
| (a) O conjunto dos sublimites de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem um único elemento. | (c) O conjunto X é limitado. |
| (b) A sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. | (d) O derivado de X é vazio. |

3. Considere o conjunto A , definido por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x^2 - 1|}{1 - \log(x^2)} > 0 \right\}.$$

O interior do conjunto A corresponde a:

- | | |
|---|---|
| (a) $\text{int}(A) =] - \sqrt{e}, \sqrt{e}[.$ | (c) $\text{int}(A) =] - e, e[.$ |
| (b) $\text{int}(A) =] - \sqrt{e}, \sqrt{e}[\setminus \{-1, 0, 1\}.$ | (d) $\text{int}(A) =] - e, e[\setminus \{-1, 0, 1\}.$ |

4. Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

- (a) Se B é um conjunto limitado, então B tem um número finito de elementos.
- (b) Se B é um conjunto limitado e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente de termos em B , então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona.
- (c) Se B tem um ponto de acumulação, então B tem infinitos elementos.
- (d) Se B é um conjunto limitado e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente de termos em B , então o limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertence a B .

5. Considere o conjunto C , definido por:

$$C = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \leq 4\}.$$

A fronteira do conjunto C corresponde ao conjunto:

- (a) $\text{fr}(C) =] - \infty, 3] \cup [4, +\infty[.$
- (b) $\text{fr}(C) =] - \infty, 3[\cup [4, +\infty[.$
- (c) $\text{fr}(C) = \{3, 4\}.$
- (d) $\text{fr}(C) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \leq 3\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 4\}.$

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. Seja (u_n) a sucessão de números reais definida por

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - 2u_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- (a) [2.5 val.] Prove, usando o Princípio da Indução Matemática, que $u_n = \frac{1}{1 - 2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (b) [1.5 val.] Calcule $\lim (-2n \cdot u_n)^n$.
- (c) [1.0 val.] Considere o conjunto dos termos da sucessão (u_n) . Averigüe se é um conjunto aberto, fechado ou nem aberto nem fechado.

2. Calcule, justificando, os seguintes limites:

- (a) [3.0 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \sin(n)}{2n + 1};$
- (b) [3.0 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n + 1}{(2n + 1)!}};$
- (c) [4.0 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2(n + 1)}{n\sqrt{3n^2 + 2k + 6}}.$