

Análise Matemática I C

Repetição do Primeiro Teste

26/06/2012

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

Chave das perguntas de escolha múltipla:

① C

② A

③ B

④ C

⑤ A

Questões de resposta aberta

①

a) Começamos por mostrar que a condição se transforma numa hipótese verdadeira para $n=1$.

$$u_1 = \frac{1}{1-2 \times 1} = -1 \text{ hipótese verdadeira}$$

Mostremos agora que se a condição for uma hipótese verdadeira para o natural n então também o é para o natural seguinte.

(2)

Para tal, conhecemos por definição uma hipótese e uma tese.

Hipótese: $u_m = \frac{1}{1-2m}$

Tese: $u_{m+1} = \frac{1}{1-2(m+1)}$

Provemos a tese.

$$u_{m+1} = \frac{u_m}{1-2u_m} = \frac{\frac{1}{1-2m}}{1-\frac{2}{1-2m}} = \frac{\frac{1}{1-2m}}{\frac{1-2m-2}{1-2m}} = \frac{1}{1-2(m+1)}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
por por hipótese
definição da sucessão u_m

Pelo princípio de indução Matemática, podemos concluir que

$$\forall m \in \mathbb{N}, u_m = \frac{1}{1-2m}.$$

b) Pela afirmação anterior sabemos que

$$\forall m \in \mathbb{N}, u_m = \frac{1}{1-2m}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (-2m u_m)^m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{-2m}{1-2m} \right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2m}} \right)^m = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{1}{2m} \right)^{2m} \right]^{1/2}} = \frac{1}{(e^{-1})^{1/2}} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

(3)

c) Sendo x uma sucessão convergente para 0 e designando por X o conjunto dos seus termos temos que

$$\text{int}(X) = \emptyset$$

$$f_X(x) = X \cup \{0\}$$

$$\overline{X} = \text{int}(X) \cup f_X(x) = X \cup \{0\}$$

Como $\text{int}(X) \neq X$, X não é um conjunto aberto e como $\overline{X} \neq X$ pois 0 não é termo da sucessão, X não é um conjunto fechado.

(2)

a)

$\forall m \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin m \leq 1$ logo $\sin m$ é uma sucessão limitada

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m}}{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{m}}{2+1/m} = 0$$

Uma vez que o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo, podemos concluir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m} \sin m}{2m+1} = 0$$

$$b) \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{m+1}{(2m+1)!}} = 0^0$$

$$\frac{m+1}{(2m+1)!} > 0, \forall m \in \mathbb{N}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{(2n+3)!}}{\frac{n+1}{(2n+1)!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(2n+1)!}{(n+1)(2n+3)!} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)(2n+3)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{(1 + \frac{1}{n})(2n+3)(2n+2)} = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{(2n+1)!}} = 0$$

e) Começamos por enquadrando a sucessão.

$$(n+1) \frac{2(n+1)}{n \sqrt{3n^2 + 2n + 8}} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2(n+1)}{n \sqrt{3n^2 + 2k + 6}} \leq \frac{2(n+1)}{n \sqrt{3n^2 + 8}} (n+1), \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{n \sqrt{3n^2 + 2n + 8}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{\sqrt{3 + \frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{n \sqrt{3n^2 + 8}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{\sqrt{3 + \frac{8}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Pelo Teorema das sucessões enquadadas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2(n+1)}{n \sqrt{3n^2 + 2k + 6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$