FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Repetição do 2º Teste — 26 de Junho de 2012

1. Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2-5)^2, & \text{se } x \leq 1 \\ \\ \operatorname{arctg}(x), & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

   (a) **[1.0 val.]** Estude a continuidade de f no seu domínio.

   (b) **[1.5 val.]** Estude a diferenciabilidade de f e determine a sua função derivada.

   (c) **[1.5 val.]** Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

   (d) **[1.0 val.]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (e) **[1.0 val.]** Determine, justificando, o contradomínio de f.

2. **[4.0 val.]** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cuja **derivada** é definida, em todos os pontos de $\mathbb{R}$, por

$$g'(x) = \frac{x-1}{x^2+3}.$$

   Determine os pontos de inflexão e as concavidades de g.

3. **[4.0 val.]** Calcule, justificando, o seguinte limite:

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

4. Considere as funções f e g, reais de variável real, de classe C^2 em $\mathbb{R}$, tais que $g(x) = f(e^{x-1})$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$ e $f''(1) = 8$.

   (a) **[2.0 val.]** Mostre que $g(1) = 2$, $g'(1) = 4$ e $g''(x) = e^{x-1}f'(e^{x-1}) + (e^{x-1})^2 f''(e^{x-1})$.

   (b) **[2.0 val.]** Escreva a fórmula de Taylor da função g, com resto de Lagrange de ordem 2, em torno do ponto de abcissa $x = 1$.

   (c) **[2.0 val.]** Utilize as alíneas anteriores para calcular o valor do limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-2-4(x-1)}{(x-1)^2}.$$