Análise Matemática I C

Repetição do Segundo Teste

26/06/2012

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

1

Atendendo a que quer as funções polinomiais, quer a função arctg têm domínio $\mathbb{R}$, podemos concluir que f tem domínio $\mathbb{R}$.

Para $x<1$, f é contínua porque é definida à custa de uma função polinomial.

Para $x>1$, f é contínua pois é definida pela função arctg.

Para $x=1$ temos:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\leq 1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\leq 1}} x(x^2-5)^2 = 16$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Como os dois limites anteriores não são iguais, f não é contínua em $x=1$.

$\therefore f$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Se f não é contínua em $x = 1$ então f não é diferenciável em $x = 1$.

Para $x < 1$, f é diferenciável porque é definida à custa de uma função polinomial. Temos então que

$$f'(x) = (x^2-5)^2 + 2x\,(x^2-5)\,2x$$

Para $x > 1$, f é diferenciável pois é definida por $\operatorname{arctg} x$ e

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Assim, f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2-5)^2 + 4x^2(x^2-5), & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

c) Começamos por analisar a variação de sinal de f'

$$(x^2-5)^2 + 4x^2(x^2-5) = 0 \Leftrightarrow (x^2-5)(x^2-5+4x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5)(5x^2-5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5)\,5\,(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5} \vee x = \pm 1$$

		$-\sqrt{5}$		-1		1	
x^2-5	$+$		$-$		$-$		
x^2-1	$+$		$+$		$-$		
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

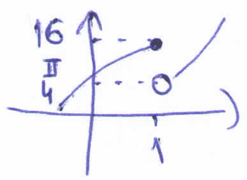
Atendendo ao comportamento de f' podemos concluir que

f é crescente em $]-\infty, -\sqrt{5}[$ e $]-1, 1[$ e $]1, +\infty[$

f é decrescente em $]-\sqrt{5}, -1[$

f tem um máximo local em $x = -\sqrt{5}$ e um mínimo local em $x = -1$.

Analisemos o comportamento de f na vizinhança de $x=1$



Para $x=1$ existe um máximo local de f.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x(x^2-5)^2 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

e)

Sabemos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 16$, $f(-\sqrt{5}) = 0$.

Sabemos ainda que f é contínua em $]-\infty, 1[$.

Como $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi/2$ e f é contínua e crescente em $]1, +\infty[$, podemos concluir que

$$D'_f =]-\infty, 16]$$

2

Comecemos por determinar g''.

$$g''(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)' = \frac{x^2+3-(x-1)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2+2x}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

Analisemos o sinal de g''.

$$-x^2+2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

		-1		3	
g''	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\cap$		$\cup$		$\cap$
		PI		PI	

Atendendo à variação do sinal de g'' podemos concluir (5)

que f tem concavidade voltada para baixo em

$]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$, tem concavidade voltada

para cima em $]-1,3[$ e pontos de inflexão em

$x=-1$ e $x=3$.

(3)

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (\infty^0) = \lim_{x\to+\infty} e^{\log\left[(e^x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log(e^x+1)}{\sqrt{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+1)}{\sqrt{x}}}$$

$\downarrow$

porque a exponencial é uma função contínua

Determinemos então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+1)}{\sqrt{x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$\log(e^x+1)$ e $\sqrt{x}$ são diferenciáveis em $]0,+\infty[$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0, \ \forall x \in]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[\log(e^x+1)]'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} \sqrt{x} = +\infty$$, logo pela Regra de

Cauchy $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+1)}{\sqrt{x}}$ existe e tomará o

valor $+\infty$.

Assim

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = +\infty .$$

4

a)

$$g(1) = f(e^{1-1}) = f(e^0) = f(1) = 2$$

$$g'(x) = f'(e^{x-1})\, e^{x-1}$$

$$g'(1) = f'(e^{1-1})e^{1-1} = f'(1) = 4$$

$$g''(x) = [\, f'(e^{x-1})\, e^{x-1}]' =$$

$$= f''(e^{x-1})(e^{x-1})^2 + f'(e^{x-1})\, e^{x-1}$$

b)

Atendendo a que g é de classe $C^2(\mathbb{R})$ sabemos que

$$g(x) = g(1) + (x-1)g'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} g''(c), \text{ com } c \text{ entre } 1 \text{ e } x$$

Assim,

$$g(x) = 2 + 4(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}\left(e^{c-1} f'(e^{c-1}) + (e^{c-1})^2 f''(e^{c-1})\right),$$

com c entre 1 e x

e)

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - 2 - 4(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{(x-1)^2}{2}\left(e^{c-1} f'(e^{c-1}) + (e^{c-1})^2 f''(e^{c-1})\right)}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{2}\left(e^{c-1} f'(e^{c-1}) + (e^{c-1})^2 f''(e^{c-1})\right)$$

Como c está entre 1 e x, quando x tende para 1, c também vai tender para 1. Atendendo a que $f \in C^2(\mathbb{R})$, sabemos que f' e f'' são funções contínuas em $\mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - 2 - 4(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2}\left(e^{c-1} f'(e^{c-1}) + (e^{c-1})^2 f''(e^{c-1})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f'(1) + f''(1)\right) = \frac{1}{2}(4+8) = 6$$