Análise Matemática I C

Repetição do Terceiro Teste

26/06/2012

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

1. Recorrendo à técnica de primitivação por partes temos

$$\int x^4 \log x \, dx = \frac{x^5}{5}\log x - \int \frac{x^4}{5}\, dx =$$

$$= \frac{x^5}{5}\log x - \frac{x^5}{25} + c, \text{ com } c \text{ uma constante real}$$

2. Efectuando a substituição:

$\sqrt{x+1} = t \Leftrightarrow x+1 = t^2 \Leftrightarrow x = t^2 - 1$, com $x \in [0,1]$ vem

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}+1}{x+2}\, dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+1}{t^2-1+2}\, 2t \, dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t^2+2t}{t^2+1}\, dt =$$

$$\begin{array}{r|l} 2t^2 + 2t & t^2+1 \\ \hline -2t^2 - 2 & 2 \\ \hline 2t-2 & \end{array}$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} 2 + \frac{2t-2}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} 2 + \frac{2t}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \left[2t + \log(t^2+1) - 2\,\mathrm{arctg}\, t\right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\sqrt{2} + \log 3 - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2} - 2 - \log 2 + 2\frac{\pi}{4} =$$

$$= 2\sqrt{2} + \log 3 - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2} - 2 - \log 2 + \pi/2$$

(3)

Tratando-se da primitiva de uma função racional, começamos por determinar as raízes do polinómio denominador.

$$x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$$

$$\frac{3x^2-4x-7}{(x-1)(x^2+2x-3)}=\frac{3x^2-4x-7}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}=$$

$$=\frac{A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)}$$

Assim,

$$3x^2-4x-7=A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2$$

Em particular, para $x=1$ temos

$$3-4-7=4A \Leftrightarrow -8=4A \Leftrightarrow A=-2$$

Para $x=-3$ vem

$$27+12-7=16C \Leftrightarrow 32=16C \Leftrightarrow C=2$$

Para $x=0$, atendendo a que $A=-2$ e $C=2$ temos

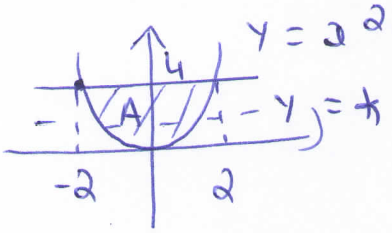
$$-7=-6-3B+2 \Leftrightarrow -3=-3B \Leftrightarrow B=1$$

Então

$$\int \frac{3x^2-4x-7}{(x-1)(x^2+2x-3)}\,dx = \int \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{2}{x-1} + \log|x-1| + 2\log|x+3| + c, \text{ com } c \in \mathbb{R}$$

4) graficamente, podemos representar o domínio A como:



Se $y = k$ deverá dividir A em duas regiões de igual área, então:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} k - x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 4 - x^2\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[kx - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k\sqrt{k} - \frac{2k\sqrt{k}}{3} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(8 - \frac{8}{3}\right)\cancel{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2 - \frac{2}{3}\right)k\sqrt{k} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\sqrt{k^3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \sqrt{k^3} = 4 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{16}$$

(5)

$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}\,dx$ é um integral impróprio de segunda espécie uma vez que o domínio de integração é um intervalo limitado, mas a função integranda não é limitada no domínio de integração.

$$0 \leq \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}} \leq \frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}, \forall x \in [0,1]$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1$$ finito e não nulo,

logo $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}\,dx$ e $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ têm a mesma natureza pelo que $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}\,dx$ é convergente.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 1$$ finito e não nulo,

pelo que $\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}\,dx$ e $\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ têm a mesma natureza.

Assim $\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}\,dx$ é convergente.

Podemos então concluir que

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_{0}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}\,dx + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ é}$$

convergente, pelo que

$$\int_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x}\,\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ será convergente.}$$

Sendo a função integranda não negativa, esta convergência é absoluta.