

Análise Matemática I (B, C, D e E)

1^a Teste – 23 de Março de 2012

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 2 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,3 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Considere o conjunto A , definido por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2^{-\frac{1}{x}}|x-5|}{4-x^2} \geq 0 \right\}.$$

A fronteira do conjunto A é o conjunto:

- (a) $\{-2, 2, 5\}$. (b) $\{-2, 2\}$. (c) $\{-2, 0, 2, 5\}$. (d) $\{-2, 0, 2\}$.

Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} -1 + \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 + \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Considere o conjunto $B = (]0, 2[\setminus \{1\}) \cup \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) O conjunto dos minorantes de B é $] -\infty, -1]$, mas B não tem mínimo.
 (b) O conjunto dos minorantes de B é $] -\infty, -1[$, mas B não tem mínimo.
 (c) O conjunto dos minorantes de B é $] -\infty, -1]$ e B tem mínimo.
 (d) O conjunto dos minorantes de B é $] -\infty, -1[$ e B tem mínimo.

3. O interior e o derivado de B são:

- (a) $\text{int}(B) =]0, 2[$ e $B' = [0, 2]$.
 (b) $\text{int}(B) =]0, 2[$ e $B' = [0, 2] \cup \{-1, 3\}$.
 (c) $\text{int}(B) =]0, 1[\cup]1, 2[$ e $B' = [0, 2] \cup \{-1, 3\}$.
 (d) $\text{int}(B) =]0, 1[\cup]1, 2[$ e $B' = [0, 2]$.

4. Considere o conjunto C , definido por:

$$C = (]0, e[\cap \mathbb{Q}) \cup [\pi, 5[.$$

O interior do conjunto C corresponde a:

- (a) $\text{int}(C) = (]0, e[\cap \mathbb{Q}) \cup]\pi, 5[.$ (c) $\text{int}(C) =]\pi, 5[.$
(b) $\text{int}(C) =]0, e[\cup]\pi, 5[.$ (d) $\text{int}(C) = [\pi, 5[.$

5. Qual das seguintes afirmações é falsa?

- (a) Se um conjunto contiver a sua fronteira então é fechado.
(b) O conjunto dos termos de uma sucessão de números reais convergente tem sempre (pelo menos) um ponto de acumulação.
(c) Um conjunto de pontos isolados tem sempre interior vazio.
(d) Um conjunto pode ser simultaneamente aberto e fechado.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. Considere a sucessão definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

(a) [3.0 val.] Prove, usando o Princípio de Indução Matemática, que

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) [2.0 val.] Utilizando a alínea anterior, calcule o seguinte limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

2. Calcule os seguintes limites:

(a) [3.0 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+5}{n^2+6} \left(\sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) + (-1)^n \right);$

(b) [3.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^6 - 2}{n^6} \right)^{n^3+3};$

(c) [3.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2k}}.$