Análise Matemática I (B, C, D e E)

1º Teste – 23 de Março de 2012

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 2 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,3 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Considere o conjunto A , definido por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2^{-\frac{1}{x}} |x-5|}{4-x^2} \geq 0 \right\}.$$

A fronteira do conjunto A é o conjunto:

- (a) $\{-2, 2, 5\}$. (b) $\{-2, 2\}$. (c) $\{-2, 0, 2, 5\}$. (d) $\{-2, 0, 2\}$.

Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} -1 + \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 + \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Considere o conjunto $B = (]0, 2[\setminus \{1\}) \cup \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) O conjunto dos minorantes de B é $] -\infty, -1]$, mas B não tem mínimo.
 (b) O conjunto dos minorantes de B é $] -\infty, -1[$, mas B não tem mínimo.
 (c) O conjunto dos minorantes de B é $] -\infty, -1]$ e B tem mínimo.
 (d) O conjunto dos minorantes de B é $] -\infty, -1[$ e B tem mínimo.

3. O interior e o derivado de B são:

- (a) $\text{int}(B) =]0, 2[$ e $B' = [0, 2]$.
 (b) $\text{int}(B) =]0, 2[$ e $B' = [0, 2] \cup \{-1, 3\}$.
 (c) $\text{int}(B) =]0, 1[\cup]1, 2[$ e $B' = [0, 2] \cup \{-1, 3\}$.
 (d) $\text{int}(B) =]0, 1[\cup]1, 2[$ e $B' = [0, 2]$.

4. Considere o conjunto C , definido por:

$$C = (]0, e[\cap \mathbb{Q}) \cup [\pi, 5[.$$

O interior do conjunto C corresponde a:

- (a) $\text{int}(C) = (]0, e[\cap \mathbb{Q}) \cup]\pi, 5[.$ (c) $\text{int}(C) =]\pi, 5[.$
(b) $\text{int}(C) =]0, e[\cup]\pi, 5[.$ (d) $\text{int}(C) = [\pi, 5[.$

5. Qual das seguintes afirmações é falsa?

- (a) Se um conjunto contiver a sua fronteira então é fechado.
 (b) O conjunto dos termos de uma sucessão de números reais convergente tem sempre (pelo menos) um ponto de acumulação.
(c) Um conjunto de pontos isolados tem sempre interior vazio.
(d) Um conjunto pode ser simultaneamente aberto e fechado.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

(Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.)

1. Considere a sucessão definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

(a) [3.0 val.] Prove, usando o Princípio de Indução Matemática, que

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) [2.0 val.] Utilizando a alínea anterior, calcule o seguinte limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Resposta:

(a) Começemos por mostrar que para $n = 1$ a condição se transforma numa proposição verdadeira. Efectivamente,

$$\frac{1^2 + 1}{2} = 1 = a_1,$$

isto é, obtemos uma proposição verdadeira.

Assumamos agora que a condição é uma proposição verdadeira para um dado número natural n , ou seja, que

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2},$$

o que constitui a nossa hipótese de indução, e mostremos que a condição também é uma proposição verdadeira para o natural seguinte, isto é, que

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2},$$

que será a nossa tese de indução.

Assim,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + n + 1 = \frac{n^2 + n}{2} + n + 1 \quad (\text{pela hipótese de indução}) \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n^2 + 2n + 1) + n + 1}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Desta forma, recorrendo ao Princípio de Indução Matemática, podemos concluir a veracidade da proposição considerada.

- (b) Para determinar o valor do limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 + n}{2}}$ vamos recorrer ao teorema que nos garante que se $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e existir $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2 + n + 1}{2}}{\frac{n^2 + n}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Como, $a_n = \frac{n^2 + n}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

2. Calcule os seguintes limites:

(a) [3.0 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 5}{n^2 + 6} \left(\sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) + (-1)^n \right);$

(b) [3.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^6 - 2}{n^6} \right)^{n^3 + 3};$

(c) [3.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2k}}.$

Resposta:

(a) Temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 5}{n^2 + 6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{6}{n^2}} = 0$ e a sucessão

$$a_n = \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) + (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é limitada. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 5}{n^2 + 6} \left(\sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) + (-1)^n \right) = 0,$$

por ser o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada.

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^6 - 2}{n^6} \right)^{n^3 + 3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n^6} \right)^{n^3 + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{n^6} \right)^{n^6} \right]^{\frac{n^3 + 3}{n^6}} = (e^{-2})^0 = 1 \end{aligned}$$

porque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 3}{n^6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^6} = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n^6}\right)^{n^6} = e^{-2}.$$

(c) Para $n \in \mathbb{N}$, a soma $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2k}}$ pode escrever-se como

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2k}} = \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2}} + \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 4}} + \cdots + \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2n + 2}}.$$

Daqui facilmente se conclui que a menor e a maior parcelas da soma são $\frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2n + 2}}$ e $\frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2}}$, respectivamente. Atendendo a que na soma em causa existem $n + 1$ parcelas, podemos considerar o seguinte enquadramento para a sucessão:

$$(n + 1) \cdot \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2n + 2}} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2k}} \leq (n + 1) \cdot \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2}}, \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\frac{3n + 3}{\sqrt{9n^2 + 2n + 2}} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2k}} \leq \frac{3n + 3}{\sqrt{9n^2 + 2}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculemos o limite da sucessão minorante e o da sucessão majorante. Temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n + 3}{\sqrt{9n^2 + 2n + 2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{3}{n}}{\sqrt{9 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n + 3}{\sqrt{9n^2 + 2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{3}{n}}{\sqrt{9 + \frac{2}{n^2}}} = 1.$$

Pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{\sqrt{9n^2 + 2k}} = 1.$$