FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

2º Teste — 4 de Maio de 2012

1. Considere a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2+2x+2)\,e^{-x}, & \text{se } x > -1 \\ \log\left((x^2-4)^2\right), & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

   (a) **[1.0 val.]** Determine o domínio da função f.

   (b) **[1.0 val.]** Estude a continuidade de f no seu domínio.

   (c) **[0.5 val.]** Calcule $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$.

   (d) **[1.5 val.]** Estude a diferenciabilidade de f e determine a sua função derivada.

   (e) **[1.5 val.]** Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

   (f) **[1.0 val.]** Verifique que a função f' é diferenciável e determine a função segunda derivada de f.

   (g) **[1.5 val.]** Determine os sentidos de concavidade de f e os seus pontos de inflexão.

   (h) **[0.5 val.]** Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

   (i) **[1.0 val.]** Determine, justificando, o contradomínio de f.

   (j) **[0.5 val.]** Esboce o gráfico de f.

2. **[3.0 val.]** Calcule, justificando, o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2}\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\,x\right).$$

3. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

   (a) **[2.5 val.]** Escreva a fórmula de MacLaurin de f, com resto de Lagrange de ordem 2.

   (b) **[2.5 val.]** Utilize a fórmula determinada na alínea anterior para calcular o valor do limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x^2(1+x)} - \frac{1}{x^2}\right).$$

4. Seja f uma função real de variável real, diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f(0)=0$ e cuja a derivada, f', é uma função crescente.

   (a) **[1.0 val.]** Aplique o Teorema de Lagrange à função f para provar que

$$\frac{f(x)}{x} \leq f'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

   (b) **[1.0 val.]** Prove que a função real de variável real, g, definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

   é crescente em $\mathbb{R}^+$.