Resolução do Segundo teste de Análise Matemática I C

(04/05/2012)

Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

Problema 1

a) Em $]-1,+\infty[$ a função está sempre bem definida pois as funções polinomiais e exponenciais têm domínio $\mathbb{R}$.

Em $]-\infty,-1]$, como o domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}^+$, para que a função f esteja bem definida

$$(x^2-4)^2 > 0 \Leftrightarrow x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$$

Logo $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) Em $]-1,+\infty[$, f é contínua pois resulta do produto de duas funções contínuas, um polinómio e a composta de duas funções contínuas (uma função exponencial e um polinómio).

Em $]-\infty,-1[\setminus \{-2\}$, f é contínua pois resulta da composta de funções contínuas ($\log x$, x^2 e x^2-4).

Para $x=-1$:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} -(x^2+2x+2)e^{-x} = -e$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x \leq -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x \leq -1}} \log((x^2-4)^2) = \log 9$$

Como $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x \leq -1}} f(x) = \underbrace{\log 9}_{>0} \neq \underbrace{-e}_{<0} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$ f não é contínua em $x=-1$.

Assim, f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}$.

c)

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x \neq -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x \neq -2}} \log((x^2-4)^2) = -\infty$$

logo $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$.

d) Em $]-1,+\infty[$, f é diferenciável pois resulta do produto de duas funções diferenciáveis, um polinómio e a composta de duas funções diferenciáveis (uma função exponencial e um polinómio).

Logo,

$$f'(x) = -(2x+2)e^{-x} + (x^2+2x+2)e^{-x} =$$

$$= e^{-x}(-\cancel{2x} - \cancel{2} + x^2 + \cancel{2x} + \cancel{2}) =$$

$$= x^2 e^{-x}$$

Em $]-\infty,-1[\setminus\{-2\}$, f é diferenciável pois resulta da composta de funções diferenciáveis ($\log x$, x^2 e x^2-4).

Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2-4)^{\cancel{2}}}\, 2\,(x^{\cancel{2}}-4)\,2x = \frac{4x}{x^2-4}$$

A função não é diferenciável em $x=-1$ pois não é contínua em $x=-1$.

Temos então

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x}, & \text{se } x > -1 \\ \dfrac{4x}{x^2-4}, & \text{se } x < -1 \text{ e } x \neq -2 \end{cases}$$

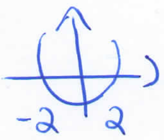
e) Comecemos por determinar os pontos de estacionaridade de f.

Para $x > -1$

$$x^2 e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Para $x < -1$ e $x \neq -2$

$$\frac{4x}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ impossível}$$



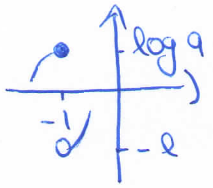
$Y = x^2-4$

		-2		-1		0	
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	‖	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	‖	↗		↗		↗

f é decrescente em $]-\infty,-2[$

f é crescente em $]-2,-1[$ e $]-1,+\infty[$

Para $x=-1$, atendendo aos limites calculados na alínea b), uma representação local da função poderá ser dada por



logo a função tem um máximo local em $x=-1$.

O ponto $x=-2$ não é extremo local pois não pertence ao domínio da função.

A monotonia da função permite-nos concluir que não existe um extremo local em $x=0$.

f) Em $]-1,+\infty[$, f' é diferenciável pois resulta do produto de duas funções diferenciáveis, um polinómio e a composta de duas funções diferenciáveis (uma exponencial e um polinómio). Assim:

$$f''(x) = 2x\,e^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)\,e^{-x}$$

Em $]-\infty,-1[\setminus\{-2\}$, f' é diferenciável pois resulta do quociente de duas funções diferenciáveis (dois polinómios). Temos então:

$$f''(x) = \frac{4(x^2-4)-8x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-4x^2-16}{(x^2-4)^2}$$

Assim

$$f''(x)=\begin{cases} x(2-x)e^{-x}, & \text{se } x>-1 \\ \dfrac{-4(x^2+4)}{(x^2-4)^2}, & \text{se } x<-1 \text{ e } x\neq -2 \end{cases}$$

g) Começamos por determinar os candidatos a pontos de inflexão.

Para $x>-1$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x(2-x)e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$$

Para $x<-1$ e $x\neq -2$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-4(x^2+4)}{(x^2-4)^2}=0 \quad \text{impossível}$$

		-2		-1		0		2	
$f''(x)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cap$		$\cap$		$\cap$		$\cup$		$\cap$

f tem a concavidade voltada para baixo em

$$]-\infty,-2[\ \cup\ ]-2,0[\ \cup\ ]2,+\infty[$$

f tem a concavidade voltada para cima em

$$]0,2[$$

f tem pontos de inflexão em $x=0$ e $x=2$.

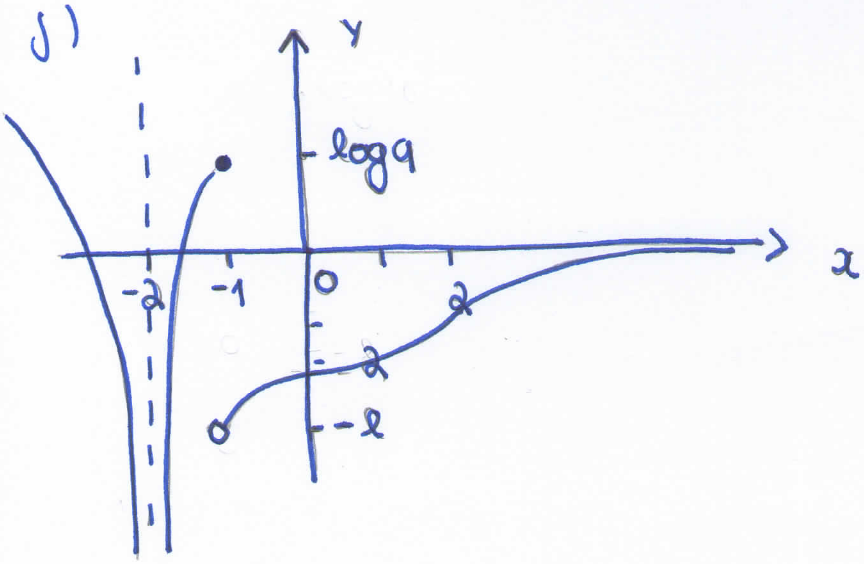
h)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-(x^2+2x+2)}{e^x} = 0$$, atendendo às velocidades de crescimento dos polinómios e da função exponencial.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log\left((x^2-4)^2\right) = +\infty$$

i) Atendendo a que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ e a que f é contínua em $]-\infty, -2[$, podemos concluir que f tem contradomínio $\mathbb{R}$.

j)



Pergunta 2

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2}\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) \overset{0\times\infty}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{cotg\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$\sqrt{1-x^2}$ e $cotg\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ são diferenciáveis em $]0,1[$

$$\left[cotg\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]' = -\frac{1}{sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \cdot \frac{\pi}{2} \neq 0, \ \forall x \in]0,1[$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(cotg\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)'} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-1/2}(-\cancel{2}x)}{-\frac{1}{sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \cdot \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{2}{\pi} = +\infty$$

Logo, como $\lim_{x \to 1^-} \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(cotg\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)'} = +\infty$, podemos concluir, recorrendo à Regra de Cauchy, que $\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{cotg\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = +\infty$.

Assim, $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2}\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) = +\infty$.

Pergunta 3

a)

$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{-1\})$.

$f(0) = \frac{e^0}{0+1} = 1$

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} = \frac{e^x x}{(x+1)^2} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2(e^x + e^x x) - e^x x\, 2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{e^x(x+1)^2 - e^x 2x}{(x+1)^3} = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}$$

A fórmula de MacLaurin, com resto de Lagrange de ordem 2 será:

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(c)$, com c entre 0 e x ou seja,

$\frac{e^x}{x+1} = 1 + \frac{x^2}{2} \frac{e^c(c^2+1)}{(c+1)^3}$, com c entre 0 e x

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x^2(1+x)} - \frac{1}{x^2} \underset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{e^x}{1+x} - 1\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cancel{x^2}}\left(\cancel{1} + \frac{\cancel{x^2}}{2} \frac{e^c(c^2+1)}{(c+1)^3} - \cancel{1}\right) =$$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{e^c(c^2+1)}{(c+1)^3} = \frac{1}{2}$ pois quando $x \to 0$, como c está entre 0 e x, $c \to 0$.

Pergunta 4

a) f é diferenciável em $\mathbb{R}$, logo f é contínua em $\mathbb{R}$.
Seja $x>0$ e consideremos o intervalo $[0,x]$.
A função f é contínua em $[0,x]$ e diferenciável em $]0,x[$, pois é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.
Aplicando o Teorema de Lagrange, obtemos

$$\exists c \in]0,x[: f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x}, \text{ pois } f(0)=0.$$

Como f' é crescente e $c \in]0,x[$ então $f'(c) \leq f'(x)$. Logo

$$f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}.$$

b) Se $g'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ então g será crescente em $\mathbb{R}^+$.
A função g é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ pois trata-se do quociente de funções diferenciáveis (f e um polinómio) e o seu denominador não se anula (pois $x \in \mathbb{R}^+$). Assim:

$$g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^+$,

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x f'(x) - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x f'(x) \geq f(x)$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$$, o que se verifica atendendo à alínea anterior. Logo $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) \geq 0$ pelo que g é crescente em $\mathbb{R}^+$.