Análise Matemática I C

Resolução do 3º teste - 30 de Maio de 2012

Nota: Este é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possíveis.

Problema 1

Utilizando a técnica de primitivação por partes vem:

$$\int x \operatorname{arctg}(x^2)\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x^2) - \int \frac{x^2}{\cancel{2}} \frac{1}{1+x^4} \cancel{2}x\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^4}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x^2) - \frac{1}{4}\log(1+x^4) + c$$

, com c uma constante real.

Problema 2

Considerando a tabela de substituições fornecida, vemos que uma possibilidade será considerar a substituição

$$x = 3\operatorname{sen} t \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \operatorname{sen} t \Leftrightarrow t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)$$

Assim,

$$x = 0 \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}(0) = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}(1/2) = \frac{\pi}{6}$$

Logo,

$$\int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi/6} \frac{9\,\text{sen}^2 t}{\sqrt{9-9\,\text{sen}^2 t}}\, 3\cos t\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{9\,\text{sen}^2 t}{3\sqrt{\cos^2 t}}\, 3\cos t\, dt = \int_0^{\pi/6} \frac{9\,\text{sen}^2 t}{3\cos t}\, 3\cos t\, dt = \int_0^{\pi/6} 9\,\text{sen}^2 t\, dt$$

pois

$t \in [0, \pi/6] \Rightarrow \cos t > 0$

Atendendo a que

$1 = \cos^2 t + \text{sen}^2 t$ e $\cos(2t) = \cos^2 t - \text{sen}^2 t$ concluímos

que $1 - \cos(2t) = 2\,\text{sen}^2 t \Leftrightarrow \text{sen}^2 t = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}$

Assim

$$\int_0^{\pi/6} 9\,\text{sen}^2 t\, dt = \int_0^{\pi/6} \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\cos(2t)\, dt =$$

$$= \left[\frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\,\text{sen}(2t)\right]_0^{\pi/6} =$$

$$= \frac{9}{2}\frac{\pi}{6} - \frac{9}{4}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{9}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{9}{8}\sqrt{3}$$

Problema 3

a) Trata-se da primitiva de uma função racional. Assim

$$\frac{3x^3+6x+3}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$, uma vez que não

é possível efectuar a divisão entre os polinómios numerador e denominador e o polinómio denominador apresenta 0 como única raiz real, com multiplicidade dois.

Reduzindo ao mesmo denominador vem:

$$\frac{3x^3+6x+3}{x^2(x^2+3)} = \frac{A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+3)}$$

$$3x^3+6x+3 = A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2$$

$$\begin{cases} 3 = B+C \\ 0 = A+D \\ 6 = 3B \\ 3 = 3A \end{cases} \qquad \begin{cases} C=1 \\ D=-1 \\ B=2 \\ A=1 \end{cases}$$

Então:

$$\int \frac{3x^3+6x+3}{x^2(x^2+3)}\,dx = \int \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{x-1}{x^2+3}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x} + 2\log|x| + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx - \int \frac{1}{x^2+3}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x} + 2\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1/\sqrt{3}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x} + 2\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

b) Se $g'(x) = f(x)$ então g é uma primitiva de f, logo são da forma

$$g(x) = -\frac{1}{x} + 2\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Atendendo a que $g(1) = -1 + \log 2$ vem

$$g(1) = -1 + \frac{1}{2}\log 4 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c =$$

$$= -1 + \log(\sqrt{4}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} + c =$$

$$= -1 + \log 2 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + c = -1 + \log 2 \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Então:

$$g(x) = -\frac{1}{x} + 2\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Problema 4

Começamos por determinar as intersecções entre f e g.

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{x+1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4-x} = \frac{(x+1)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = (4-x)(x+1)^2 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = (4-x)(x^2+2x+1) \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4} = 4x^2 + 8x + \cancel{4} - x^3 - 2x^2 - x \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 7x = 0 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(-x^2 + 2x + 7) = 0 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+28}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

Atendendo a que o domínio está limitado pelas rectas $x=-1$ e $x=1$, as possíveis intersecções $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$ ocorrem fora do domínio considerado. Como $\frac{1}{\sqrt{4-0}} = \frac{0+1}{2}$, $x=0$ é a única intersecção das duas funções no domínio considerado.

Para $x = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{7/2}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$$

Para $x = -\frac{1}{2}$:

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4+1/2}} = \frac{1}{\sqrt{9/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{12}$$

$$g\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Assim,

$f(\frac{1}{2}) < g(\frac{1}{2})$ e $f(-\frac{1}{2}) > g(-\frac{1}{2})$, donde

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{4-x}} - \frac{x+1}{2}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{x+1}{2} - \frac{1}{\sqrt{4-x}}\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (4-x)^{-1/2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - (4-x)^{-1/2}\, dx =$$

$$= \left[-2(4-x)^{1/2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 2(4-x)^{1/2}\right]_{0}^{1} =$$

$$= -4 + 2\sqrt{5} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} - 4 =$$

$$= -8 + \frac{1}{2} + 2(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = -\frac{15}{2} + 2(\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

Problema 5

$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$ trata-se de um integral impróprio de primeira espécie uma vez que o domínio de integração é ilimitado ($[0,+\infty[$), mas a função integranda é limitada em qualquer subconjunto limitado do domínio de integração.

Atendendo à definição de integral impróprio de primeira espécie temos: (f)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\operatorname{arctg}(e^x)\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \operatorname{arctg}(e^t) - \operatorname{arctg}(e^0) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$