Análise Matemática I E

Exame de Recurso

21-01-2013

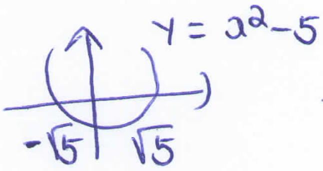
Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possíveis.

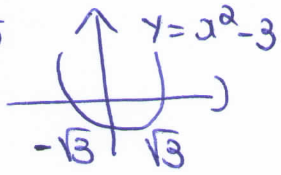
Exercício 1

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 4 - x^2 \leq 1 \wedge x - 2 \neq 0\}$

$-1 \leq 4 - x^2 \leq 1 \wedge x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 5 \leq 0 \wedge x^2 - 3 \geq 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$





$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \wedge x \in]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[\wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2[\cup]2, \sqrt{5}]$

Logo

$D_f = [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2[\cup]2, \sqrt{5}]$

b) $\text{int}(D_f) =]-\sqrt{5}, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 2[\cup]2, \sqrt{5}[$

$\text{fr}(D_f) = \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}\}$

$D_f' = [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

Exercício 2

Começamos por mostrar que para $n=1$ obtemos uma proposição verdadeira:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1^2+1}{4} \rightarrow \text{proposição verdadeira}$$

Assumamos que obtemos uma proposição verdadeira para o natural n e mostremos que o mesmo sucede para o natural $n+1$.

Hipótese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n^2+n}{4}$

Tese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2} = \frac{(n+1)^2+n+1}{4}$

Prova da tese:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} + \frac{n+1}{2} \underset{\text{por hipótese}}{=} \frac{n^2+n}{4} + \frac{n+1}{2} = \frac{n^2+2n+1+n+1}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2+n+1}{4}$$

Exercício 3

a)

$$\frac{n^2+1}{n^2+3} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{n^2+1}{n^2+3} = 1 - \frac{2}{n^2+3} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim

$$0 < \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$ logo u_n é

uma sucessão limitada.

b)

$$\lim \frac{2^n+1}{3^n+n} = \lim \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{n}{3^n}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

Como o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo e atendendo a que pela alínea anterior u_n é limitada concluímos

que $$\lim \left(\frac{2^n+1}{3^n+n} u_n\right) = 0$$

Exercício 4

a) Começamos por determinar o domínio de f.

Para $x>0$

$x>0 \wedge \log x \neq 0 \Leftrightarrow x>0 \wedge x \neq 1$

Para $x \leq 0$

$x^2+1 \neq 0 \rightarrow$ condição universal

Logo $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Analisemos agora a função quanto à sua continuidade.

Para $x>0 \wedge x \neq 1$, f é contínua pois é definida como o quociente de duas funções contínuas (um polinómio e um logaritmo).

Para $x<0$, f é contínua pois é definida como a soma de duas funções contínuas (uma constante e uma função racional).

Para $x=0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\log x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \leq 0}} 2 + \frac{x}{x^2+1} = 2$$

Como os dois limites anteriores são distintos concluímos que f não é contínua em $x=0$. Logo f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

b) Como f não é contínua em $x=0$, f não é diferenciável em $x=0$.

Para $x>0 \wedge x\neq 1$, f é diferenciável pois é definida como o quociente de duas funções diferenciáveis (um polinómio e um logaritmo). Temos ainda:

$$f'(x) = \frac{\log x - x\frac{1}{x}}{\log^2 x} = \frac{\log x - 1}{\log^2 x}$$

Para $x<0$, f é diferenciável pois é definida como a soma de duas funções diferenciáveis (uma constante e uma função racional). Temos:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Assim

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x - 1}{\log^2 x}, & \text{se } x>0 \wedge x\neq 1 \\[2mm] \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}, & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Por forma a estudar a monotonia da função, analisemos o sinal de f'.

		-1		0		1		e	
$\log x - 1$					$-$		$-$	0	$+$
$\log^2 x$					$+$		$+$		$+$
$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$	$-$		$+$						
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↘		↗

Atendendo a que f é contínua em $x = -1$ e $x = e$ e ao quadro de sinal, podemos concluir que estes pontos correspondem a mínimos relativos.

Para $x = 0$, atendendo aos limites calculados na alínea anterior, podemos concluir que existe um máximo relativo.

f é crescente em $]-1, 0[$ e em $]e, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, -1[$, $]0, 1[$ e $]1, e[$.

e) Analisemos o sinal de f'' para estudar o sentido das concavidades de f.

		$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$		e^2	
$2-\log x$					$+$		$+$		$+$	0	$-$
$x\log^3 x$					$-$		$+$		$+$		$+$
$2x(x^2-3)$	$-$	0	$+$								
$(x^2+1)^3$	$+$		$+$								
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$-$		$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cup$		$\cap$
		PI								PI	

f tem a concavidade voltada para cima em

$$]-\sqrt{3}, 0[\ \cup \ ]1, e^2[$$

f tem a concavidade voltada para baixo em

$$]-\infty, -\sqrt{3}[\ \cup \ ]0, 1[\ \cup \ ]e^2, +\infty[$$

f tem pontos de inflexão em $x = -\sqrt{3}$ e $x = e^2$.

O ponto $x = 0$ não é ponto de inflexão pois f não é contínua em $x = 0$.

Exercício 5

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{\operatorname{arctg}(x-1)} \left(\frac{0}{0}\right)$$

Sejam $f(x) = \log x$ e $g(x) = \operatorname{arctg}(x-1)$.

As funções f e g são diferenciáveis em $]0,2[$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} \neq 0 \quad , \forall x \in]0,2[$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{\frac{1}{1+(x-1)^2}} = 1$$

Logo, pela Regra de Cauchy, $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{\operatorname{arctg}(x-1)} = 1$

Exercício 6

a) A função f é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+)$.

$f(x) = e^{\sqrt{x}-1}$ $\qquad f(1) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^{\sqrt{x}-1} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad f'(1) = \dfrac{1}{2}$

$$f''(x) = e^{\sqrt{x}-1} \frac{1}{4x} + e^{\sqrt{x}-1} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} =$$

$$= e^{\sqrt{x}-1} \frac{1}{4x} + e^{\sqrt{x}-1} \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Assim, a fórmula de Taylor da função f, em torno do ponto $a=1$, com resto de Lagrange de ordem 2 é:

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(c)$$

$$e^{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}\left(e^{\sqrt{c}-1}\frac{1}{4c} + e^{\sqrt{c}-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{c^3}}\right),$$

com c entre 1 e x

b) Consideremos

$$F(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}-1}\, dt$$

Para definir o domínio de F, começamos por analisar a função integranda. Para estar bem definida

$t \geq 0$.

Assim:

$t \in [0,x]$, se $x \geq 0 \wedge t \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$t \in [x,0]$, se $x < 0 \wedge t \geq 0 \Rightarrow$ nenhum x satisfaz as condições

Logo $D_F = \mathbb{R}_0^+$

$e^{\sqrt{t}} - 1$ é contínua para o domínio considerado.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral,

F é diferenciável e

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e \quad F'_d(0) = f(0)$$

Em particular, F é diferenciável em $]0,1[$ e contínua em $[0,1]$. Pelo Teorema de Lagrange,

$$\exists c \in]0,1[: F'(c) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F(1) - 0 = F(1)$$

ou seja

$$\exists c \in]0,1[: f(c) = F(1)$$

<u>Exercício 7</u>

a)

$$\int x^2 e^x \, dx = e^x x^2 - \int 2x e^x \, dx = e^x x^2 - e^x 2x + \int 2 e^x \, dx =$$

$f(x) = e^x \quad F(x) = e^x$

$g(x) = x^2 \quad g'(x) = 2x$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + c, \text{ com } c \text{ constante real}$$

$f(x) = e^x \quad F(x) = e^x$

$g(x) = 2x \quad g'(x) = 2$

b) Trata-se de um integral impróprio de segunda espécie, uma vez que o domínio de integração é um conjunto limitado, mas a função integranda é ilimitada no domínio de integração.

$$\int_0^{16} \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x^5}+9\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{16} \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x^5}+9\sqrt[4]{x^3}}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x^5}+9\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int \frac{t+1}{t^5+9t^3}\,4t^3\,dt =$$

$\sqrt[4]{x}=t \Leftrightarrow x=t^4$

$$= \int \frac{4t+4}{t^2+9}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{2t}{t^2+9}\,dt + 4\int \frac{1}{t^2+9}\,dt =$$

$$= 2\log(t^2+9) + \frac{4}{3}\int \frac{1/3}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1}\,dt =$$

$$= 2\log(t^2+9) + \frac{4}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) + c$$

$$= 2\log(\sqrt{x}+9) + \frac{4}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{3}\right) + c,$$

com c constante real

Assim

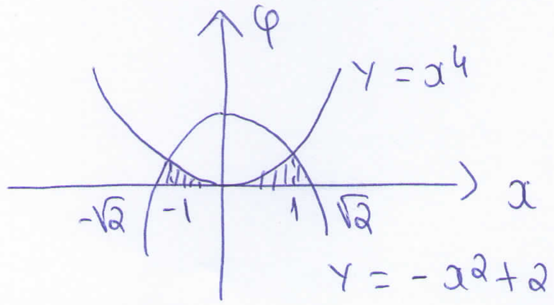
$$\int_0^{16} \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x^5}+9\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2\log(13)+\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)-\right.$$

$$\left.-2\log(\sqrt{\varepsilon}+9)-\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{3}\right)\right] =$$

$$= 2\log(13)+\frac{4}{3}\operatorname{arctg}(2/3)-2\log 9$$

Exercício 8

Começamos por esboçar o domínio em causa.



$$x^4 = -x^2+2 \Leftrightarrow x^4+x^2-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{x^2=y}{\Leftrightarrow} y^2+y-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} \cancel{-2} & \text{pois } y=x^2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

Considerando a simetria do domínio temos que

$$\text{Área} = 2\left(\int_0^1 x^4\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} -x^2+2\,dx\right) =$$

$$= 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + 2\left[-\frac{x^3}{3}+2x\right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2}{5} + 2\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} + \frac{1}{3} - 2\right) =$$

$$= \frac{2}{5} + 2\left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{10}{3} + \frac{2}{5} = \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{50}{15} + \frac{6}{15} =$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{44}{15}$$

Exercício 9

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}\,(x^3-3)}\,dx$$

→ integral impróprio de primeira espécie pois o domínio de integração é um conjunto ilimitado mas a função integranda é limitada em qualquer subconjunto limitado do domínio de integração.

$\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin [2, +\infty[$

$x^3 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3} \notin [2, +\infty[$

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}\,(x^3-3)} > 0, \ \forall x \in [2, +\infty[$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x-1}\,(x^3-3)}}{\dfrac{1}{x^{5/2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{7/2}}{\sqrt{x-1}\,(x^3-3)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \frac{x^3}{x^3-3} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{1-1/x}} \, \frac{1}{1-3/x^3} = 1$$ finito e não nulo

Logo $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}\,(x^3-3)}\,dx$ e $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}}\,dx$ têm a

mesma natureza.

Como $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}}\,dx$ é convergente, podemos concluir

que $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}\,(x^3-3)}\,dx$ é convergente e sendo a

função integranda não negativa, esta convergência

é absoluta.