

Análise Matemática I (B, C, D e E)

2º Teste — 21 de Novembro de 2012

1. Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 e^{1-x}, & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{x^2 - 4}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- (a) [0.5 val.] Determine o domínio de f .
- (b) [1.0 val.] Estude a continuidade de f no seu domínio.
- (c) [1.5 val.] Estude a diferenciabilidade de f e determine a sua função derivada.
- (d) [2.0 val.] Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f .
- (e) [1.0 val.] Calcule, se existirem, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. [4.0 val.] Seja g uma função real de variável real, definida por

$$g(x) = x \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{|x^2 - 2|}{1 + x^2} \right).$$

Sabendo que a **derivada** de g é definida por

$$g'(x) = \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2 - 2},$$

determine os pontos de inflexão e as concavidades de g .

3. [3.0 val.] Calcule, justificando, o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\sin(2x) \right)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{4}}}.$$

4. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^2 \log(x)$.

- (a) [3.0 val.] Escreva a fórmula de Taylor, com resto de Lagrange de ordem 4, para a função f , em torno do ponto $x = 1$.
- (b) [2.0 val.] Utilizando a alínea anterior, mostre que:

$$f(x) \leq x - 1 + \frac{3}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

5. [2.0 val.] Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$, tais que

$$f(x) = g(x) + mx, \quad (m \in \mathbb{R})$$

e $g(a) = g(b)$. Mostre que a equação $f'(x) = m$ tem pelo menos uma solução em $]a, b[$.