Análise Matemática I E

Terceiro Teste (19/12/2012)

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

Pergunta 1

a) Utilizando a substituição $\sqrt{x}=t$ temos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \arcsin(\sqrt{x})\, dx = \int \frac{1}{t} \arcsin(t)\, 2t\, dt =$$

$\sqrt{x}=t \Leftrightarrow x=t^2$

$$= \int 2\arcsin(t)\, dt =$$

$$= 2t \arcsin t - \int \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt =$$

$$= 2t\arcsin t + 2\sqrt{1-t^2} + c \text{, com } c \text{ uma constante real,}$$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x} + c \text{, com } c \text{ uma constante real.}$$

b)

Sabemos que quando $x=1$ a primitiva que se pretende encontrar toma o valor 4. Assim

$$2\sqrt{1}\arcsin\sqrt{1} + 2\sqrt{1-1} + c = 4 \Leftrightarrow \cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}} + c = 4 \Leftrightarrow c = 4-\pi$$

A primitiva pretendida é

$$2\sqrt{x}\arcsen(\sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x} + 4 - \pi .$$

Pergunta 2

Dado que a função integranda é uma função racional, não sendo possível fazer a divisão do polinómio numerador pelo polinómio denominador, começamos por decompô-la em fracções mais simples. Para tal determinemos os zeros do polinómio denominador:

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$\frac{4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2)}{x(x-2)^2}$$

logo

$$4 = A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2)$$

Em particular se:

$$x = 0 \Rightarrow 4 = 4A \Leftrightarrow A = 1$$
$$x = 2 \Rightarrow 4 = 2B \Leftrightarrow B = 2$$
$$x = 1 \Rightarrow 4 = 1 + 2 + C(-1) \Leftrightarrow C = -1$$

Assim,

$$\int_e^{e+2} \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\, dx = \int_e^{e+2} \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2}\, dx =$$

$$= \left[\log x - \frac{2}{x-2} - \log(x-2) \right]_e^{e+2} =$$

$$= \log(e+2) - \frac{2}{e} - \log e - \log e + \frac{2}{e-2} + \log(e-2) =$$

$$= \log(e+2) - \frac{2}{e} - 2 + \frac{2}{e-2} + \log(e-2)$$

__Pergunta 3__

Efectuando a substituição $e^x = t$ vem:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+5}\, dx = \int_1^e \frac{t^{\cancel{2}}}{t^2+2t+5} \frac{1}{\cancel{t}}\, dt = \int_1^e \frac{t}{t^2+2t+5}\, dt$$

$e^x = t \Leftrightarrow x = \log t$

$x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = e$

Atendendo a que não é possível efectuar a divisão do polinómio numerador pelo polinómio denominador e que este último não apresenta raízes reais temos:

$$\int_1^e \frac{t}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{2t+2}{t^2+2t+5}\,dt - \int_1^e \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(t^2+2t+5)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{(t+1)^2+4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(t^2+2t+5)\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1/2}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}\,dt =$$

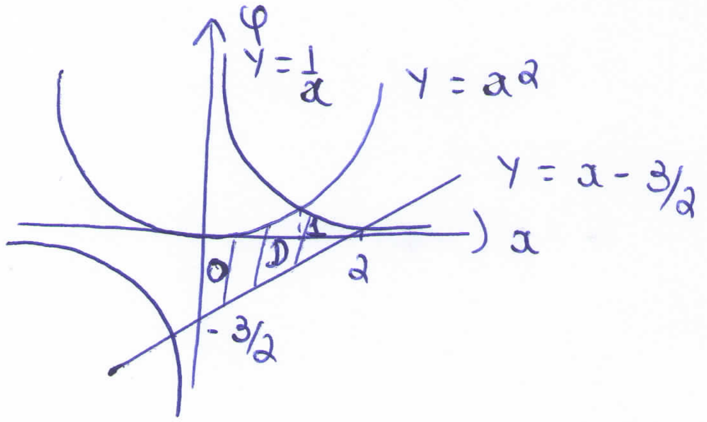
$$= \frac{1}{2}\left[\log(t^2+2t+5)\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right]_1^e =$$

$$= \frac{1}{2}\log(e^2+2e+5) - \frac{1}{2}\log 8 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\log(e^2+2e+5) - \frac{1}{2}\log 8 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e+1}{2}\right) + \frac{\pi}{8}$$

Pergunta 4

Comecemos por esboçar o domínio em causa.



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \quad x^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x - 3/2 \end{cases} \quad \frac{1}{x} = x - 3/2 \Leftrightarrow$$

$$1 = x^2 - \frac{3}{2}x \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -1/2 \end{matrix} \right.$$

$$\text{Área} = \int_0^1 x^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right) dx +$$

$$+ \int_1^2 \frac{1}{x} - (x - 3/2)\, dx$$

$$\text{Área} = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right]_0^1 + \left[\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{3}{2}} + \log 2 - 2 + 3 - 0 + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{3}{2}} =$$

$$= \log 2 + \frac{4}{3}$$

Pergunta 5

Trata-se de um integral impróprio de primeira espécie, uma vez que o domínio de integração é um conjunto ilimitado, mas a função integranda é limitada em qualquer subconjunto limitado contido no domínio de integração. Assim:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,x}}\,dx = \lim_{y \to -\infty} \int_y^0 \frac{1}{1+x^2}\left(\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,x\right)^{-1/2} dx =$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \left[\left(\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,x\right)^{1/2}\right]_y^0 =$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \sqrt{\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,0} - \sqrt{\pi + 2\,\mathrm{arct}\,y} =$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,y} = \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi + \cancel{2}\left(-\frac{\pi}{\cancel{2}}\right)} = \sqrt{\pi}$$