Análise Matemática I E

Exame de Época de Recurso

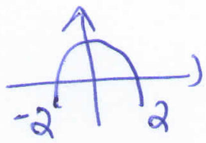
21 de junho de 2013

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possibilidades.

Exercício 1

Começamos por determinar o conjunto D.

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0 \wedge x \neq 0\} =$$



$$= [-2, 0[\cup]0, 2]$$

Por outro lado, a sucessão de termo geral

$$\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$$

é uma sucessão decrescente, de primeiro termo 3 e limitada.

Assim, sendo $X = D \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ temos

$$\operatorname{int}(X) =]-2, 0[\cup]0, 2[$$

$$\operatorname{fr}(X) = \{-2, 0, 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

Exercício 2

a)

$$\lim (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \cos n = 0 \quad \text{pois}$$

$(-1)^n \cos n$ é uma sucessão limitada dado que

$$|(-1)^n \cos n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

e $\lim \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log 1 = 0$

Como o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo, concluímos que

$$\lim (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \cos n = 0.$$

b)

$$\lim \left(\frac{n+5}{3n+1}\right)^{n+2} = \lim \left(\frac{1+\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^{n+2} = 0$$

Exercício 3

a) Atendendo a que $x^2+1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e que arctg x tem domínio $\mathbb{R}$ podemos concluir que o domínio de f é $\mathbb{R}$

b) Para $x<0$ a função é contínua pois é a soma de três funções contínuas (uma constante, arctg x e o quociente entre duas funções contínuas, uma constante e um polinómio).

Para $x>0$ a função é contínua pois é o quociente de duas funções contínuas (duas funções polinomiais).

Para $x=0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\leq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\leq 0}} 3+\operatorname{arctg} x - \frac{2}{x^2+1} = 3-2=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

Como os limites anteriores não são iguais, f não é contínua para $x=0$. Logo f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

c) Não sendo f contínua em $x=0$ também não será diferenciável nesse ponto.

Para $x<0$ a função é diferenciável pois é a soma de três funções diferenciáveis (uma constante, arctg x e o quociente entre duas funções diferenciáveis, uma constante e um polinómio).

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

Para $x>0$ a função é diferenciável pois é o quociente de duas funções diferenciáveis (dois polinómios).

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+1)^2} & \text{se } x<0 \\[2ex] \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Analisemos a monotonia de f.

$$x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -2 \pm \sqrt{3}$$

		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		0		1	
$\frac{x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$	+	0	-	0	+				
$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$							+	0	-
$f'(x)$	+	0	-	0	+		+	0	-
$f(x)$	↗		↘		↗		↗		↘

f é crescente em $]-\infty, -2-\sqrt{3}[$, $]-2+\sqrt{3}, 0[$ e em $]0,1[$

f é decrescente em $]-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}[$ e em $]1,+\infty[$

Atendendo à monotonia da função podemos concluir que f tem um máximo local para $x = -2-\sqrt{3}$ e em $x = 1$ e um mínimo local em $x = -2+\sqrt{3}$.

Atendendo aos limites calculados na alínea anterior e novamente à monotonia da função concluímos que $x = 0$ é um ponto de máximo local.

Exercício 4

Começamos por determinar a segunda derivada de g

$$g''(x) = \frac{x^2+1-(x+2)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{-2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{-2} =$$

$$= -2 \pm \sqrt{5}$$

Atendendo a que $(x^2+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e a que $-x^2-4x+1$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo e as raízes $-2 \pm \sqrt{5}$ podemos concluir que g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2-\sqrt{5}[\cup]-2+\sqrt{5}, +\infty[$ e a concavidade voltada para cima em $]-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}[$.

A função g tem ainda dois pontos de inflexão em

$$x = -2-\sqrt{5} \quad e \quad x = -2+\sqrt{5}.$$

Exercício 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sem}\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Tendo em conta que $\operatorname{sem}\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ (por ser a composta de duas funções contínuas seno e um polinómio), o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que $\int_0^x \operatorname{sem}\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$\left(\int_0^x \operatorname{sem}\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \right)' = \operatorname{sem}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$$

x^3 é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(x^3)' = 3x^2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x \operatorname{sem}\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sem}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\pi}{6} \frac{\operatorname{sem}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)}{\frac{\pi}{2} x^2} = \frac{\pi}{6}$$

Pela Regra de Cauchy concluímos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sem}\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt}{x^3} = \frac{\pi}{6}.$$

Exercício 6

a)

1. Começamos por mostrar que a condição se transforma numa proposição verdadeira para $n=1$

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4}x^{1/4-1}$$ → proposição verdadeira

2. Assumamos que a condição é uma proposição verdadeira para o natural n e mostremos que o mesmo sucede para o natural $n+1$.

Hipótese:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-(n-1)\right)x^{1/4-n}$$

Tese:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-n\right)x^{1/4-(n+1)}$$

Prova da tese:

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' \underset{\text{pela hipótese}}{=} \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-(n-1)\right)x^{1/4-n}\right]' =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-n\right)x^{1/4-(n+1)}$$

Pelo raciocínio de indução matemática

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-(n-1)\right)x^{1/4-n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b)

Atendendo à alínea anterior, concluímos que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}_0^+)$.

Assim:

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + \cdots + \frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(1) +$$
$$+ \frac{(x-1)^n}{n!}f^{(n)}(c), \text{ com } c \text{ entre } 1 \text{ e } x$$

$$f'(1) = \frac{1}{4}\,1^{1/4-1} = \frac{1}{4}$$

$$f''(1) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)1^{1/4-2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{16}$$

Logo:

$$\sqrt[4]{x} = 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{16}\frac{(x-1)^2}{2} + \cdots + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-(n-2)\right)\times$$
$$\times\frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-(n-1)\right)c^{1/4-n}\frac{(x-1)^n}{n!},$$

com c entre 1 e x.

Exercício 7

a) Consideremos a substituição $x = \cos t$. Então

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\pi-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \frac{\cos^2 t+1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}(-\operatorname{sen} t)\,dt =$$

$$= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi/3} \frac{\cos^2 t+1}{\cancel{\operatorname{sen} t}}(-\cancel{\operatorname{sen} t})\,dt = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos^2 t+1\,dt =$$

$$= \int_{\pi/3}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2}+\frac{\cos(2t)}{2}+1\,dt = \left[\frac{3}{2}t+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} =$$

$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{3}} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{4} - \frac{\cancel{3}}{2}\frac{\pi}{\cancel{3}} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{4} =$$

$$= \pi + \frac{\operatorname{sen}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\times 4} - \frac{\sqrt{3}}{2\times 4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

b) $\int_0^1 x \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{4+x^2} dx =$

$f(x) = x \quad F(x) = \frac{x^2}{2}$

$g(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) \quad g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2+\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{4+x^2}$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \int_0^1 1 - \frac{4}{4+x^2} dx =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \int_0^1 1 - 2 \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \left[x - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - 1 + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - 1$

e) $\int_2^3 \frac{3x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

$x^3-2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2=0$

Logo

$$\frac{3x+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1)}{x^3-2x^2+x}$$

Assim

$$3x+1 = A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1).$$

Em particular se:

$x=1$

$$4 = B$$

$x=0$

$$1 = A$$

$x=-1$

$$-2 = \cancel{4} - \cancel{4} + 2C \Leftrightarrow C = -1$$

Donde:

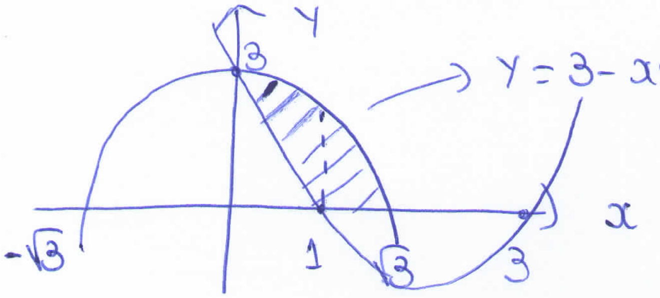
$$\int_2^3 \frac{3x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \left[\log x - \frac{4}{x-1} - \log(x-1)\right]_2^3 = \log 3 - 2 - \log 2 - \log 2$$

$$+4 = \log 3 - 2\log 2 + 2$$

Exercício 8

Começamos por fazer um esboço do domínio considerado.



$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_0^1 \cancel{3} - x^2 - x^2 + 4x - \cancel{3}\, dx + \int_1^{\sqrt{3}} 3 - x^2\, dx =$$

$$= \int_0^1 -2x^2 + 4x\, dx + \int_1^{\sqrt{3}} 3 - x^2\, dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 + \left[3x - \frac{x^3}{3} \right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{2}{3} + 2 + 3\sqrt{3} - \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} - 3 + \frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$$

Exercício 9

$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ é um integral impróprio de primeira espécie pois o domínio de integração é um conjunto ilimitado mas a função integranda é limitada em qualquer subconjunto limitado do domínio de integração. Nota-se que o integral seria de primeira espécie desde que o seu intervalo de integração estivesse contido em $]-1,+\infty[$.

$$\frac{x}{\sqrt{x^3+1}} > 0, \forall x \in [2,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = 1$$ que é um valor finito e não nulo. Assim,

$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ e $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ têm a mesma natureza.

Logo $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ é divergente.

Exercício 10

Sendo f diferenciável e consequentemente contínua em $\mathbb{R}^+$, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que

$$\left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

Derivando ambos os membros da igualdade vem

$$f(x) + x f'(x) = a + f(x)$$

$$\Leftrightarrow x f'(x) = a \Leftrightarrow f'(x) = \frac{a}{x}$$
$$(x \in \mathbb{R}^+)$$

Logo

$$f(x) = a \log x + c \text{ , com } c \text{ constante real}$$

Para $x=1$, usando a igualdade fornecida temos

$$f(1) = a$$

Por outro lado

$$f(1) = c \text{ , donde } c = a.$$

Assim

$$f(x) = a \log x + a \text{ , } \forall x \in \mathbb{R}^+$$