FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

1º Teste — 3 de Abril de 2013

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{|x-3|}{(x+2)(x-1)}\leq 0\right\}\quad \text{e}\quad B=\,]-\infty,2]\cup\{4\}.$$

(a) **[1.0 val.]** Determine o conjunto A.

(b) **[1.0 val.]** Determine o interior, a fronteira e o derivado do conjunto B e a aderência de $A\cup B$.

(c) **[1.0 val.]** Averigúe se o conjunto B é fechado e/ou aberto. Justifique.

2. Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$\begin{cases} u_1=1\\ u_{n+1}=2u_n+6, \quad \forall n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

a) **[2.0 val.]** Utilizando o Princípio de Indução Matemática, mostre que

$$u_n=7\times 2^{n-1}-6,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

b) **[1.5 val.]** Calcule o valor do seguinte limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{3^n+2}.$$

3. Calcule o valor dos seguintes limites:

a) **[1.5 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$;

b) **[2.0 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}}$;

c) **[2.0 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=5}^{n}\frac{2+\sqrt{n^2+1}}{3+\sqrt{n^4+k}}$.

4. Considere a função real de variável real definida por,

$$f(x)=\begin{cases}\arccos(2x+3), & x<-1\\ 2, & x=-1\\ \dfrac{x+1}{x^2-9}, & x>-1.\end{cases}$$

a) **[2.0 val.]** Determine o domínio de f.

b) **[2.0 val.]** Estude a continuidade de f no seu domínio.

c) **[2.0 val.]** Justifique a existência de máximo e mínimo absoluto de f no intervalo $[0,2]$.

d) **[2.0 val.]** Prove a existência de uma solução da equação,

$$\frac{x+1}{x^2-9}=1-x$$

no intervalo $\left[-\frac{1}{2},2\right]$.