FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

2º Teste — 24 de Abril de 2013

1. Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\big((x-2)^2\big) + 1, & \text{se } x \geq 2 \\ e^{x^2-3x+2}, & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

   (a) **[1.0 val.]** Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$.

   (b) **[2.5 val.]** Estude a diferenciabilidade de f e determine a sua função derivada.

   (c) **[2.5 val.]** Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

2. **[3.0 val.]** Seja g uma função real de variável real cuja **derivada** é definida por

$$g'(x) = (x-4)\, e^{\frac{1}{2}x^2+2x}.$$

   Determine os pontos de inflexão e as concavidades de g.

3. **[3.5 val.]** Calcule, justificando, o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \big(\cos(x^2)\big)^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

4. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = (x-1)\log(x-1)$.

   (a) **[3.5 val.]** Escreva a fórmula de Taylor, com resto de Lagrange de ordem 3, para a função f, em torno do ponto $a = 2$.

   (b) **[2.0 val.]** Utilizando a fórmula obtida na alínea anterior, calcule

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-1)\log(x-1) - (x-2)}{(x-2)^2}.$$

5. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = x^2 \operatorname{arctg}(x^2) + x^2 - 1 - \frac{1}{2}\log(x^4+1).$$

   (a) **[0.5 val.]** Mostre que f é uma função par.

   (b) **[1.5 val.]** Determine o número exacto de soluções da equação

$$x^2 \operatorname{arctg}(x^2) + x^2 = 1 + \frac{1}{2}\log(x^4+1).$$