Análise Matemática I E

Resolução do exame de recurso

1.º semestre 2014/15

Nota: Esta é apenas uma possibilidade de resolução de entre muitas outras alternativas.

1) a) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{|x-1|-2} \geq 0 \Leftrightarrow |x-1|-2 > 0 \wedge x-1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-1| > 2 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1 > 2 \vee x-1 < -2) \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x > 3 \vee x < -1) \wedge x \geq 1$

$\Leftrightarrow x > 3$

$A =]3, +\infty[$

b) $(-1)^n - 3 = \begin{cases} 1-3, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1-3, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$= \begin{cases} -2, & \text{se } n \text{ é par} \\ -4, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$A \cup B = \{-4, -2\} \cup]3, +\infty[$

$\text{int}(A \cup B) =]3, +\infty[\qquad \overline{A \cup B} = \{-4, -2\} \cup [3, +\infty[$

$\text{fr}(A \cup B) = \{-4, -2, 3\}$

$A \cup B$ não é aberto pois $A \cup B \neq \text{int}(A \cup B)$

$A \cup B$ não é fechado pois $A \cup B \neq \overline{A \cup B}$

c) $(A \cup B)' = [3, +\infty[$

d) Não existe máximo, nem supremo de $A \cup B$ pois $A \cup B$ não é limitado superiormente.

$\inf(A \cup B) = \min(A \cup B) = -4$

(2) i) Começamos por mostrar que para $n=1$ obtemos uma proposição verdadeira

$4 \times 1 - 3 = 1 = 1(2 \times 1 - 1) \rightarrow$ proposição verdadeira

ii) Assumamos que para um dado n obtemos uma proposição verdadeira e mostremos que o mesmo sucede para o natural seguinte.

Hipótese: $1+5+9+\dots+(4n-3) = n(2n-1)$

Tese: $1+5+9+\dots+(4n+1) = (n+1)(2n+1)$

Prova da tese:

$1+5+9+\dots+(4n+1) = 1+5+9+\dots+(4n-3)+(4n+1) =$

$= n(2n-1) + 4n+1 = 2n^2+3n+1 = (n+1)(2n+1)$

por hipótese

3

a) $\dfrac{(2m)!}{(m!)^2} > 0, \; \forall m \in \mathbb{N}$

$$\lim \frac{\dfrac{(2(m+1))!}{((m+1)!)^2}}{\dfrac{(2m)!}{(m!)^2}} = \lim \frac{(2m+2)!\; m!\; m!}{(m+1)!\,(m+1)!\,(2m)!} =$$

$$= \lim \frac{(2m)!\,(2m+1)(2m+2)\; m!\, m!}{m!\,(m+1)\; m!\,(m+1)\,(2m)!} = \lim \frac{(2m+1)(2m+2)}{(m+1)(m+1)}$$

$$= \lim \frac{2(2m+1)}{m+1} = \lim \frac{2\left(2+\frac{1}{m}\right)}{1+\frac{1}{m}} = 4$$

Assim,

$$\lim \sqrt[m]{\frac{(2m)!}{(m!)^2}} = 4$$

b)

$$\lim \left(\frac{2m-3}{2m+1}\right)^{m+1} = \lim \frac{\left(1-\frac{3}{2m}\right)^{m+1}}{\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{m+1}} =$$

$$= \lim \frac{\left[\left(1-\frac{3}{2m}\right)^{2m}\right]^{\frac{m+1}{2m}}}{\left[\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{2m}\right]^{\frac{m+1}{2m}}} = \frac{\left(e^{-3}\right)^{1/2}}{e^{1/2}} = e^{-3/2-1/2} = e^{-2},$$

pois $\lim \dfrac{m+1}{2m} = \lim\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2m}\right) = \dfrac{1}{2}$

e)

$$2n \times \frac{n-1}{3n^2+1} \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{n+\cos(k\pi)}{3n^2+1} \leq \frac{n+1}{3n^2+1} \times 2n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim 2n \frac{n-1}{3n^2+1} = \lim \frac{2n^2-2n}{3n^2+1} = \lim \frac{2-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\lim 2n \frac{n+1}{3n^2+1} = \lim \frac{2n^2+2n}{3n^2+1} = \lim \frac{2+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

Pelo teorema das sucessões enquadradas podemos concluir que

$$\lim \sum_{k=1}^{2n} \frac{n+\cos(k\pi)}{3n^2+1} = \frac{2}{3}$$

4) a) Para $x \leq \sqrt{2}$

$-1 \leq |x^2-1| \leq 1 \Leftrightarrow |x^2-1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 2$

$\Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

Para $x > \sqrt{2}$ temos que $x - \sqrt{2} > 0$ logo a função está sempre bem definida. Assim

$$D_f = [-\sqrt{2}, +\infty[$$

b) Para $x < \sqrt{2}$ e $x \geq -\sqrt{2}$, h é contínua porque é a composta de três funções contínuas, arcoseno, o módulo e um polinómio.

Para $x > \sqrt{2}$, h é contínua porque é a composta de duas funções contínuas, arctg e a inversa da composta de duas funções contínuas, a raiz quadrada e um polinómio.

Para $x = \sqrt{2}$

$$\lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x \leq \sqrt{2}}} h(x) = \lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x \leq \sqrt{2}}} \operatorname{arcsen}(|x^2 - 1|) = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} h(x) = \lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2}}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como $\lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x \leq \sqrt{2}}} h(x) = \lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} h(x)$, h é contínua em $x = \sqrt{2}$

$\therefore$ h é contínua em todo o seu domínio

e) Seja $g(x) = h(x) - \frac{x}{2}$. Provar que a equação $h(x) = \frac{x}{2}$ tem uma solução no intervalo $[1, \sqrt{2}]$ equivale a provar que g tem um zero no mesmo intervalo.

A função g é contínua em $[1, \sqrt{2}]$, pois é a diferença de duas funções contínuas (h e um polinômio)

$g(1) = h(1) - \frac{1}{2} = \arcsin(|1^2 - 1|) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

$g(\sqrt{2}) = h(\sqrt{2}) - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} > 0$

Logo, pelo teorema de Bolzano, g tem pelo menos um zero em $[1, \sqrt{2}]$.

5

a)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cos(f(x))$ pois para x suficientemente grande temos $x \neq 0$.

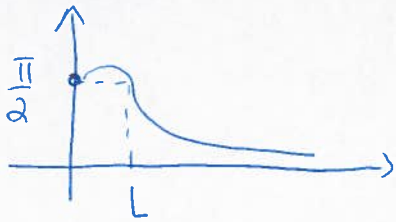
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\cos(f(x))$ é limitada entre -1 e 1

Assim, podemos concluir que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cos(f(x)) = 0$,

ou seja, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b)



Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ temos que existe $L > 0$ tal que para $x > L$, $|f(x)| < \frac{\pi}{2}$.

O intervalo $[0, L]$ é fechado e limitado. Como f é contínua no seu domínio, o teorema de Weierstrass garante que f tem um máximo (M) neste intervalo. Atendendo a que para $x > L$, $f(x) \leq |f(x)| < \frac{\pi}{2} \leq M$ pois $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e $0 \in [0, L]$, podemos concluir que M é máximo absoluto de f.

6

a) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

		-1		1	
x^2-1	+	0	−	0	+
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗		↘		↗

Como g é contínua em $\mathbb{R}$, pois é a composta de duas funções contínuas (arctg e um polinómio) e atendendo a que g é crescente em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ e decrescente em $]-1,1[$, podemos concluir que g tem um máximo relativo em $x=-1$ e um mínimo relativo em $x=1$.

e) $$g''(x) = \frac{1}{1+(x^2-1)^2} \cdot 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Como $g''(x)>0$ para $x>0$ e $g''(x)<0$ para $x<0$, temos que existe mudança do sentido da concavidade de g em $x=0$, pelo que $(0,g(0))$ é ponto de inflexão.

f) $f \in \mathcal{C}^2(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x+1} \cos x \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x) = \frac{-(\operatorname{sen} x+1)\operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{(\operatorname{sen} x+1)^2} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x+1)^2} = -\frac{\operatorname{sen} x+1}{(\operatorname{sen} x+1)^2} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x+1}$$

$f(0) = \log(\operatorname{sen} 0+1) = 0$

Assim

$\log(\operatorname{sen} x+1) = x + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{1}{\operatorname{sen} c+1}\right)$, com c entre 0 e x

8) Seja $f(x) = (x^2-1)\log(x+1) - \frac{x^2}{2} + x$

$$f'(x) = 2x\log(x+1) + (x^2-1)\frac{1}{x+1} - x + 1 =$$

$$= 2x\log(x+1) + x - 1 - x + 1 = 2x\log(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\log(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \log(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Atendendo a que f é diferenciável em $]-1,+\infty[$ e a que f' tem um único zero, podemos concluir que f tem no máximo dois zeros.

$f(0) = (0^2-1)\log(0+1) - \frac{0^2}{2} + 0 = 0$ logo f tem pelo menos um zero.

	-1		0	
$2x$		$-$	0	$+$
$\log(x+1)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$		$+$		$+$

Como f é crescente o zero determinado será único.

9

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$x - \operatorname{sen} x$ e $x - \operatorname{tg} x$ são diferenciáveis em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$(x - \operatorname{tg} x)' = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} \neq 0 \, , \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x - \operatorname{tg} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)\cos^2 x}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos^2 x}{\cos x + 1} = -\frac{1}{2}$$

Pela regra de Cauchy temos $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}$

10

a)

$$\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2} \, dx = \int \frac{x+2}{x^2 (x-2)} \, dx$$

$$\frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-2) + Bx(x-2) + Cx^2}{x^2(x-2)}$$

$$x + 2 = A(x-2) + Bx(x-2) + Cx^2$$

Se $x = 0$ $\quad 2 = -2A \Leftrightarrow A = -1$

Se $x = 2$ $\quad 4 = 4C \Leftrightarrow C = 1$

Se $x = 1$ $\quad 3 = 1 + B(-1) + 1 \Leftrightarrow 1 = -B \Leftrightarrow B = -1$

Assim

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx = \int -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$= x^{-1} - \log|x| + \log|x-2| + c, \text{ com } c \text{ constante real}$$

b)

$$\int \cos(x^2)\,x^3\,dx = \frac{x^2}{2}\,\text{sen}(x^2) - \int x\,\text{sen}(x^2)\,dx =$$

$f(x) = x\cos(x^2)$ $\quad F(x) = \dfrac{\text{sen}(x^2)}{2}$

$g(x) = x^2$ $\quad g'(x) = 2x$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{sen}(x^2) + \frac{1}{2}\cos(x^2) + c, \text{ com } c \text{ constante real}$$

c) Consideremos a substituição $x = 2\,\text{sen}\,t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \text{sen}\,t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{4-4\,\text{sen}^2 t}\;2\cos t\,dt =$$

$x = -2 \Rightarrow t = \text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$x = 0 \Rightarrow t = \text{arcsen}(0) = 0$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sqrt{\cos^2 t}\;2\cos t\,dt = \int_{-\pi/2}^{0} 4\cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 4 \, \frac{1+\cos(2t)}{2} \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2 + 2\cos(2t) \, dt = \left[2t + \sin(2t) \right]_{-\pi/2}^{0} =$$

$= \pi$

11 $1+t > 0 \Leftrightarrow t > -1$

Como $\sqrt{x} \geq 0$ temos que $t \in [0, \sqrt{x}]$ logo a condição $t > -1$ é sempre satisfeita. Por outro lado, para que $\sqrt{x}$ esteja bem definida $x \geq 0$. Assim, $D_F = \mathbb{R}_0^+$.

Seja
$$G(x) = \int_0^x e^t \log(1+t) \, dt .$$

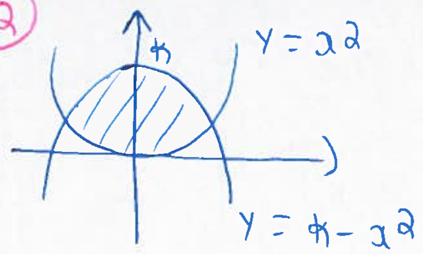
Atendendo a que $e^t \log(1+t)$ é uma função contínua no domínio adequado, o teorema fundamental do cálculo integral garante que

$$G'(x) = e^x \log(1+x).$$

Como $F(x) = G(\sqrt{x})$ temos que

$$F'(x) = G'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' = e^{\sqrt{x}} \log(1+\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

12



$$x^2 = k - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = k \Leftrightarrow x^2 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{k}{2}}$$

$$\text{Área} = \int_{-\sqrt{\frac{k}{2}}}^{\sqrt{k/2}} k - x^2 - x^2 \, dx = \int_{-\sqrt{\frac{k}{2}}}^{\sqrt{k/2}} k - 2x^2 \, dx =$$

$$= \left[kx - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-\sqrt{\frac{k}{2}}}^{\sqrt{\frac{k}{2}}} = k\sqrt{\frac{k}{2}} - \frac{\cancel{2}}{3}\frac{k}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{k}{2}} + k\sqrt{\frac{k}{2}} - \frac{\cancel{2}}{3}\frac{k}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{k}{2}}$$

$$= k\sqrt{\frac{k}{2}}\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = k\sqrt{\frac{k}{2}}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = k\sqrt{\frac{k}{2}}\,\frac{4}{\cancel{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{k^3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{k^3}{2} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow k^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

13

$\int_2^{+\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4+1}\,dx$ é um integral impróprio de primeira espécie, pois o domínio de integração é um conjunto ilimitado, mas a função integranda é limitada em qualquer subconjunto limitado do domínio de integração.

$\frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4+1} \geq 0$, $\forall x \in [2, +\infty[$, logo podemos aplicar os critérios de comparação para estudar a natureza do integral.

$$\frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}, \forall x \in [2, +\infty[$$

Como $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$ é convergente, concluímos que

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4+1}\,dx$ é convergente (absolutamente convergente).