FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

1º Teste — 1 de Novembro de 2014
(Duração 1:30)

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \frac{3x - x^2}{\log^2(|x-1|)} \geq 0 \right\} \qquad \text{e}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{(-1)^n}{n+3}, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

   (a) **[1.5 val.]** Explicite o conjunto A sob a forma de um intervalo ou de uma união de intervalos.

   (b) **[1.5 val.]** Determine o interior e a fronteira do conjunto $A \cup B$. Indique, justificando, se $A \cup B$ é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

   (c) **[0.5 val.]** Determine o derivado do conjunto $A \cup B$.

   (d) **[0.5 val.]** O conjunto $A \cup B$ admite máximo? Justifique.

   Nota: Se não conseguiu resolver a alínea (a) considere o conjunto $A =]0,3[\cup]3,5]$ na resolução das restantes alíneas.

2. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sucessão definida por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+1} = u_n \left(u_n + \dfrac{1}{4} \right), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Note que $u_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

   (a) **[2.0 val.]** Prove, usando o Princípio de Indução Matemática, que $u_n \leq \frac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) **[1.5 val.]** Mostre que a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona decrescente.

   (c) **[1.5 val.]** Justifique que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente e determine o seu limite.

v.s.f.f.
$\longrightarrow$

3. Determine o valor dos seguintes limites:

   (a) **[1.5 val.]** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$

   (b) **[1.5 val.]** $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3+n^2}{2n^2-5}\right)^n \cos(n^2+1)$

   (c) **[1.5 val.]** $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{3n^2+k}}$

4. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \arcsin(x^2-4)\frac{x^2+x-6}{x-2}.$$

   (a) **[1.5 val.]** Determine o conjunto D_f, correspondente ao domínio de f.

   (b) **[0.5 val.]** Analise f quanto à continuidade.

   (c) **[1.5 val.]** Defina g um prolongamento por continuidade de f a $\overline{D_f}$ (ou seja, à aderência de D_f).

   (d) **[1.0 val.]** Justifique que g é limitada em $\overline{D_f}$.

5. Seja h uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que existem $a, b \in \mathbb{R}$ que satisfazem:

$$h(a) = b \text{ e } h(b) = -b^3.$$

   (a) **[1.0 val.]** Mostre que h tem pelo menos um zero.

   (b) **[1.0 val.]** Utilize a alínea anterior para justificar que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que a função real de variável real definida por

$$m(x) = \begin{cases} h(x) & \text{, se } x \geq k \\ 0 & \text{, se } x < k \end{cases}$$

   é contínua em $\mathbb{R}$.